МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
РОССИЙСКАЯ АССОЦИАЦИЯ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО АВТОНОМНОГО
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Конгресс «IS&IT'11»

AIS'11
CAD-2011

«Интеллектуальные системы '11»
«Интеллектуальные САПР - 2011»

Труды конференций

Том 1

Москва
Физматлит
2011

УДК 519.812

УСЛОВИЕ ОДИНАКОВОГО УПОРЯДОЧЕНИЯ ОБЪЕКТОВ ПО ФУНКЦИЯМ ПОЛЕЗНОСТИ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ[1]

М.И. Гарина[2], С.В. Микони[3]

Рассматривается условие одинакового упорядочения объектов по функциям полезности и принадлежности. Оно включает построение функций полезности на основе функций принадлежности, а также использование для агрегирования полезности и принадлежности обобщающих функций одного типа. В качестве примера используется аддитивная обобщающая функция, отражающая важность показателей и классов.

Введение

В [Микони, 2004] была рассмотрена задача упорядочения объектов по результатам их классификации. Естественно, что такого рода задача может решаться только для классов, упорядоченных по качеству. Это означает, что каждый класс $h_k, k=\overline{1,m}$, промежуточный по уровню качества, имеет только два смежных класса – с лучшим (h_{k+1}) и худшим (h_{k-1}) уровнем качества. Таким образом, из двух объектов x_s и x_t с одинаковым значением функции принадлежности соседним классам h_k и h_{k+1}, $\mu_k(x_t)=\mu_{k+1}(x_t)$, лучшим из них окажется тот, который принадлежит классу с лучшим качеством: $x_t \succ x_s$. Для того чтобы количественно отразить это предпочтение, качество классов выражается через коэффициенты их важности: $p_{k+1} > p_k > p_{k-1}$, $\sum_{k=1}^{m} p_k = 1$. С учётом важности классов предпочтение $x_t \succ x_s$ будет иметь место при условии: $\mu_{k+1}(x_t)\cdot p_{k+1} > \mu_k(x_s)\cdot p_k$. Отсюда следует, что соотношение оценок объектов, получаемых на основе функций принадлежности, зависит от соотношения важности классов. Эта зависимость учитывается в настоящей работе при поиске

[1] *Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00439)*
[2] *190031, СПб, Московский пр, 9, ПГУПС, MIGarina@gmail.com*
[3] *190031, СПб, Московский пр, 9, ПГУПС, svm@SM4265.spb.edu*

общих условий совпадения результатов упорядочения объектов на основе классификации с результатами, получаемыми методами многокритериальной теории полезности.

1. Решение задачи упорядочения по функциям полезности

Задача упорядочения с применением многокритериальной теории полезности [Кини, Райфа, 1981] решается следующим образом.

На основе заданного j-го критерия, $j=\overline{1,n}$, строится функция полезности $u(y_j)$. Её форма может быть как линейной, так и нелинейной. Линейная форма получается при нормализации значения показателя диапазоном его шкалы. Полезность j-го показателя, подлежащего максимизации, вычисляется по следующей формуле:

$$u_{\max}(y_j)=\frac{y_j-y_{j,\min}}{y_{j,\max}-y_{j,\min}}, \qquad j=\overline{1,n}.$$

Более сложные, кусочно-линейные и нелинейные, функции полезности создаются на основе экспертных данных.

Для преобразования векторной оценки $\mathbf{y}(x_i)=(y_{i1},\ldots,y_{ij},\ldots,y_{in})$ объекта x_i в скалярную оценку обычно применяется аддитивная или мультипликативная обобщающая функция:

$$u_a^*(x_i)=f(\mathbf{y})=\sum_{j=1}^{n}w_j u_j(x_i), \tag{1.1}$$

$$u_m^*(x_i)=\prod_{j=1}^{n}u_j(x_i)^{w_j}. \tag{1.2}$$

На основе полученных скалярных оценок $y_a(x_i)$ или $y_m(x_i)$ объектам x_i, $i=\overline{1,N}$, из множества X присваиваются ранги в порядковой шкале.

2. Решение задачи упорядочения на основе функций принадлежности классам

Сквозное упорядочение объектов на основе функций принадлежности классам выполняется следующим образом.

Экспертным способом строятся функции принадлежности для каждого показателя. С этой целью шкала j-го показателя разбивается на m диапазонов по числу классов. В общем случае пересечение диапазонов, выделенных смежным классам, непустое, что соответствует заданию нечётких границ между соседними классами:

$[c_{kj,\min}, c_{kj,\max}]\cap[c_{k+1,j,\min}, c_{k+1,j,\max}]\neq\varnothing.$

Для каждого объекта вычисляется степень его принадлежности каждому из классов по всем показателям с учётом их важности w_j:

$$\mu_k(x_i) = \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot \mu_{jk}(x_i), \quad k = \overline{1,m}, \tag{2.1}$$

$$h^*(x_i) = \arg\max_k \mu_k(x_i),$$

где h^* — класс, которому объект x_i принадлежит в наибольшей степени.

Экспертным способом определяются коэффициенты важности классов p_k, = $\overline{1,m}$, после чего вычисляется оценка $y^*(x_i)$ объекта x_i по значениям его функций принадлежности смежным классам с учётом их важности:

$$y^*(x_i) = \sum_{k=1}^{m} p_k \mu_k(x_i). \tag{2.2}$$

Упорядочение объектов x_i, $i=\overline{1,N}$, выполняется на основе полученных оценок $y^*(x_i)$.

3. Условия совпадения результатов упорядочения объектов двумя методами

Очевидным способом достижения одинаковых результатов упорядочения является установление соответствия между функцией полезности показателя и функциями принадлежности классам [Микони, Гарина, 2010]. Выясним, используя формулы (1.1), (2.1) и (2.2), при каких условиях такое соответствие может быть установлено.

$$u_j(x_i) = \sum_{k=1}^{m} p_k \cdot \mu_{jk}(x_i).$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j \cdot u_j(x_i) = \sum_{k=1}^{m} p_k \cdot \mu_k(x_i)$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j \cdot u_j(x_i) = \sum_{k=1}^{m} p_k \cdot \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot \mu_{jk}(x_i) = \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot \sum_{k=1}^{m} p_k \cdot \mu_{jk}(x_i)$$

$$u_j(x_i) = \sum_{k=1}^{m} p_k \cdot \mu_{jk}(x_i). \tag{3.1}$$

Поскольку область определения функции полезности $u(y_j)$ включает в себя области определения функций принадлежности всем классам, имеется возможность вычисления функции полезности $u(y_j)$ на основе функций принадлежности классам на шкале j-го признака по формуле

(3.1). При этом обобщенные оценки $u_a^*(x_i)$ и $y^*(x_i)$ совпадут, следовательно, совпадут и результаты упорядочения.

На рис. 1 показан пример построения функции полезности $u(y_j)$ j-го показателя на основе трёх классов качества с трапецеидальными функциями принадлежности.

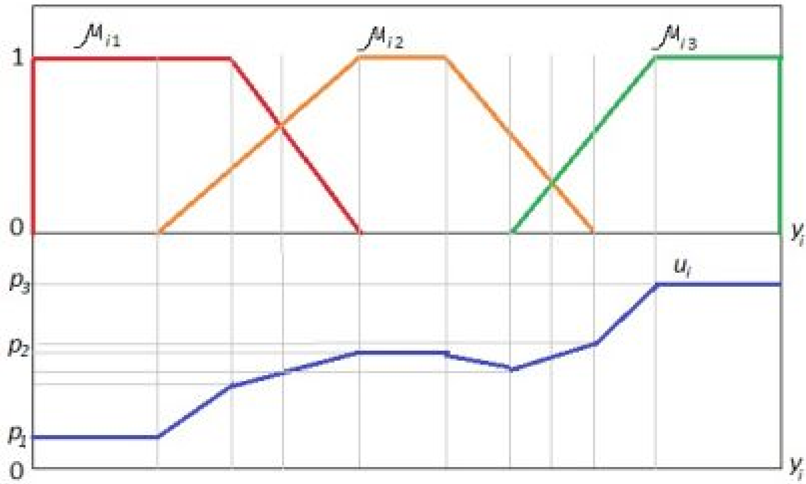

Рис. 1. Функция полезности, построенная по формуле (3.1)

Полученная функция полезности имеет кусочно-линейную форму, отражающую соответствующую форму функций принадлежности. На границе 2-го и 3-го классов функция полезности немонотонна, поскольку в этой области $\mu_{j2}(x_i)+\mu_{j3}(x_i)<1$, т.е. отсутствует свойство взаимной дополнительности.

Применение мультипликативной функции для вычисления обобщенной принадлежности в общем случае нецелесообразно. На участках полной принадлежности некоторому классу нулевая принадлежность остальным классам влечёт обнуление обобщенной принадлежности им. Условием применения мультипликативной обобщающей функции в классификации является общая область определения для всех классов. В этом случае результаты упорядочения совпадут, если функции полезности $u(y_j)$ будут вычислены по правилу

$u_j = \prod_{k=1}^{s} \mu_{ik}{}^{p_k}$ (доказательство опускается). Функции полезности будут при этом кусочно-полиномиальными.

4. Решение задач на основе соответствия между функциями принадлежности и полезности

Согласно формуле (3.1) вычисления функции полезности на основе функций принадлежности обратный переход от функции полезности к функциям принадлежности неоднозначен. Однозначное решение этой задачи возможно лишь для одной функции принадлежности при известных остальных функциях.

Пусть неизвестна функция принадлежности l-го класса, $l \neq k$, $k = \overline{1, m}$. Тогда по известным функции принадлежности и полезности j-го показателя функция принадлежности l-го класса вычисляется по следующей формуле:

$$\mu_{j,l}(x_i) = \frac{u_j(x_i) - \sum_{k=1, l \neq k}^{m} p_k \cdot \mu_{j,k}(x_i)}{p_l}.$$

Другой задачей, решаемой на основе функции полезности, построенной на основе функций принадлежности, является восстановление вектора важности классов. Для её решения представим формулу (3.1) в матричной форме:

$$\mathbf{U} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{M} \qquad (4.1)$$

Решением системы линейных алгебраических уравнений для невырожденной матрицы **M** в фиксированной точке x_i является вектор весов **P**. Поскольку существует n решений этой системы уравнений по числу объектов x_i, вектор весовых коэффициентов целесообразно определять для наилучшего (или эталонного) объекта x^*.

Заключение

Условием одинакового упорядочения объектов методами многокритериальной оптимизации и классификации является вычисление функций полезности по заданным функциям принадлежности классам. Число классов должно быть одинаково для всех показателей, а многокритериальные функции полезности и функции, вычисляющие полезность на основе функций принадлежности должны иметь одинаковый тип.

Величина весовых коэффициентов в функции сквозного упорядочения объектов по результатам классификации пропорциональна качеству классов. Для классов, обладающих свойством дополнительности, функция полезности получается монотонной.

Применению мультипликативной функции в общем случае препятствуют разные области определения функций принадлежности классам. Нулевая принадлежность хотя бы одному классу влечёт нулевое значение вычисляемой функции полезности. Тем не менее, если применение мультипликативной функции оправдано, то для совпадения результатов функции полезности также должны вычисляться по заданным функциям принадлежности.

Обратный переход от функции полезности, определённой на всей шкале показателя, и функций принадлежности, определённых на участках шкалы, не может быть однозначным. Однозначностью обладает лишь процедура восстановления одного из классов по другим классам и соответствующей им функции полезности. Другой задачей, вытекающей из найденного условия соответствия, является нахождение вектора важности классов по известным функциям полезности и принадлежности остальным классам.

Список литературы

[Кини, Райфа, 1981] Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения – М.: Радио и связь, 1981.

[Микони, 2004] Микони С.В. Теория и практика рационального выбора. – М.: Маршрут, 2004.

[Микони, Гарина, 2010] Микони С.В., Гарина М.И. Упорядочение альтернатив по функциям полезности и принадлежности. // Материалы XII-й СПб конференции «Региональная информатика-2010» (РИ-2010), СПб, 20-22.10.2010.

Опубликовано:

Гарина М.И., Микони С.В. Условие одинакового упорядочения объектов по функциям полезности и принадлежности // Труды Конгресса IS&IT'11, Дивноморское, 3-10.09. 2011, –М: Физматлит, 2011, Том 1, с.33-37.