

International Conference

INTELLECTUAL SYSTEMS

**FOR DECISION MAKING AND PROBLEMS
OF COMPUTATIONAL INTELLIGENCE**

ISDMCI'2012

Conference proceedings

Analysis and modeling of complex systems and processes
Theoretical and applied aspects of decision-making systems

Computational intelligence and inductive modeling

Information systems security

**Theoretical and applied aspects of improvement of transport
systems**

Yevpatoria – 2012

CONFERENCE ORGANIZERS:

Ministry of Education and Science, Youth and Sport of Ukraine
Glushkov Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine
Southern Scientific Centre of NAS of Ukraine and MES of Ukraine
Kherson National Technical University (Ukraine)
State Ecological Academy of Postgraduate Education and Management (Ukraine)
Lublin University of Technology (Poland)
National Aviation University (Ukraine)
Technical University of Lodz (Poland)
National Technical University of Ukraine «KPI» (Ukraine)
Kharkiv National University of Radio Electronics (Ukraine)
International Research and Training Center for Information Technologies and Systems,
NAS and MES of Ukraine
Maritime University of Szczecin (Poland)
Sukhomlinsky Mykolaiv National University (Ukraine)
National Metallurgy Academy of Ukraine
Odessa National Polytechnic University (Ukraine)
Petro Mohyla Black Sea State University (Ukraine)
Academy of Computer Science and Management (Bielsko-Biala, Poland)
Lviv State University of Life Safety (Ukraine)
University of Management (Lodz, Poland)

**INTELLECTUAL SYSTEMS FOR DECISION MAKING AND
PROBLEMS OF COMPUTATIONAL INTELLIGENCE**

ISDMCI'2012

International Conference

Intellectual Systems for Decision Making and Problems of Computational Intelligence:
Conference Proceedings. – Kherson: KNTU, 2012. – 562 pp.

ISBN 978-966-8912-70-2

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛЕЗНОСТИ НА ОСНОВЕ МАТРИЦ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ*

С.В. Микони

*Петербургский государственный университет путей сообщения,
Россия, 190031 Санкт-Петербург, Московский пр. 9, svm@sm4265.spb.edu*

Введение

Термин «функция полезности» был введён, исходя из экономических соображений. В качестве способа построения в [1] предлагались лотереи, характеризующие склонность лица, принимающего решение (ЛПР), к риску. В дальнейшем этот термин распространился на любые приложения, обобщив функцию ценности, которая строится по точкам на шкале показателя, исходя из ценности его делений [2, 3]. Сложность построения функции ценности по точкам объясняется в [2] тем, что людям обычно трудно дать осмысленные количественные оценки ценности в абсолютной шкале, т.е. в долях единицы. Для преодоления этих трудностей предлагается использовать различного рода соотношения ценности соседних точек шкалы.

Согласно [2] функция ценности должна отражать структуру предпочтений ЛПР. Естественной моделью, отвечающей этому назначению, является матрица парных сравнений (МПС). Она применяется для сопоставления сущностей по выбранному критерию. Очевидно, что если в качестве сущностей выбрать деления шкалы показателя, а в качестве критерия принять предпочтение одного деления над другим, то матрицу парных сравнений можно использовать для построения функции ценности (полезности) по приоритетам, вычисленным на основе предпочтений. В работе предлагается метод построения функций полезности (ФП) на основе МПС и рассматриваются способы построения линейных и нелинейных ФП, а также функции полезности показателей, измеряемых в номинальной шкале. Рассматривается влияние на форму ФП вида предпочтений и параметров вычисления приоритетов на основе содержимого МПС.

1. Метод построения функции полезности по МПС

Обозначим множество делений шкалы показателя через Z . Матрица парных сравнений отражает отношение предпочтений на множестве Z . В отличие от вектора \mathbf{z} , который отражает предпочтения только между соседними делениями шкалы, в матрицу парных сравнений включаются предпочтения между всеми промежуточными делениями шкалы. Это не означает, что соответствующие клетки матрицы должны заполняться экспертом. Из теории матриц парных сравнений известно, что содержимое матрицы размерности $N \times N$ может быть рассчитано автоматически на основе вектора приоритета сущностей $\mathbf{w}=(w_1, \dots, w_i, \dots, w_N)$ [4].

Разработаны также методы однозначного доопределения МПС фактов и кратности предпочтений на основе заполнения клеток, соответствующих гамильтонову пути в соотнесённом графе [4, 5].

Из изложенного следует, что для построения функции полезности по МПС достаточно сформировать вектор ценности делений шкалы показателя, либо $N-1$ предпочтений на парах делений, входящих в гамильтонов путь соотнесённого графа. Однако это не исключает возможности задания предпочтений на каждой паре делений шкалы показателя. В некоторых случаях полностью заполненная матрица может быть известна.

Функция полезности находится на основе функции приоритетов, вычисляемых на основе содержимого матрицы парных сравнений. Для её расчёта задаётся значение масштабного коэффициента c и степени матрицы k [4]. Значению $c=1$ соответствует сложение МПС с единичной матрицей \mathbf{I} . Поскольку вектор нормированных приоритетов измеряется в шкале $[w_{\min}, w_{\max}]$, а сумма его компонент равняется единице, для преобразования функции приоритетов в функцию полезности значения приоритетов пересчитываются из шкалы $[w_{\min}, w_{\max}]$ в шкалу $[0, 1]$. Преобразование осуществляется путём нормирования приоритетов: $(w_i - w_{\min}) / (w_{i, \max} - w_{\min})$, $i=1, \dots, w_{\max}$.

В полученной функции полезности наиболее ценному делению шкалы сопоставляется значение функции полезности, равное единице: $u(z_{\max})=1$. Наименее ценному делению шкалы соответствует наименьшая полезность $u(z_{\min})>0$. Это объясняется тем, что наименьший приоритет w_{\min} всегда больше нуля ($w_{\min}>0$) за счёт единицы в диагональной клетке деления шкалы с наименьшим приоритетом. Таким образом, значения функции полезности, промежуточные между нулём и единицей, получаются на $N-2$ делениях заданной шкалы.

2. Создание линейных функций полезности

Создание линейных функций полезности не требует привлечения дополнительных средств, поскольку они получаются автоматически в процессе нормализации показателей. Однако привлечение матриц парных сравнений в качестве конструктора функций полезности требует проверки их способности к созданию

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00439)

простейших функций. Условием линейности функции полезности является постоянное приращение полезности при переходе к следующему делению шкалы показателя: $\Delta u(y)=const$.

Очевидно, что условию линейности отвечают, прежде всего, матрицы, отражающие предпочтения строгого порядка. Строгое предпочтение $P_{>}(x_i, x_j)=1$ истинно тогда и только тогда, когда i -я сущность предпочтительнее j -й: $x_i \succ x_j$, что можно выразить через порядок сущностей (слева направо). Этот вид предпочтений называют также порядковыми или фактами предпочтений [4], поскольку фиксируется только наличие предпочтения с указанием его направленности – от i -й сущности к j -й или наоборот. Матрицы, содержащие порядковые предпочтения, в [4] названы матрицами фактов предпочтений – сокращенно МПС ФП. Матрица, содержащая только строгие предпочтения, является булевой.

В качестве примера рассмотрим МПС ФП размерностью 6×6 с единичной нижней треугольной подматрицей, представленную в табл.1.

МПС ФП для строгого порядка делений шкалы Таблица 1

Деления шкалы	1	2	3	4	5	6	Ценность деления	Приоритет	ФП
1	1	0	0	0	0	0	1	0,04761	0,166521
2	1	1	0	0	0	0	2	0,09521	0,333007
3	1	1	1	0	0	0	3	0,14282	0,499528
4	1	1	1	1	0	0	4	0,19042	0,666014
5	1	1	1	1	1	0	5	0,23803	0,832535
6	1	1	1	1	1	1	6	0,28591	1,000000

В левом столбце и верхней строке таблицы представлены деления шкалы показателя, последнее из которых является верхней границей шкалы. Нижняя граница шкалы – нуль – не включена в матрицу. В правом столбце таблицы представлена ценность каждого деления шкалы как сумма содержимого клеток в строках матрицы. В следующем столбце таблицы приведён вектор приоритетов, рассчитанный для параметров $c=1^1$ и $k=1$, где k – степень матрицы парных сравнений. Очевидно, функция полезности, полученная на основе треугольной единичной матрицы линейна, что иллюстрируется рисунком 1.

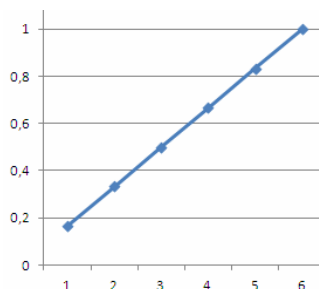


Рис. 1. Функция полезности, рассчитанная на основе треугольной единичной МПС

Заметим, что вычисляемая с помощью МПС функция полезности является дискретной. Её кусочно-линейная аппроксимация приводится с целью удобства анализа формы ФП. Для получения нисходящей линейной функции полезности единицами заполняется верхняя треугольная матрица, либо максимизация приоритетов заменяется минимизацией.

Линейная функция полезности получается также на основе матрицы «Выигрыши/потери» (МПС ВП) [4], построенной по вектору (1; 2; 3; 4; 5; 6) с единичным приращением компонент (см. табл. 2), что соответствует арифметической прогрессии с постоянной разностью (шагом) $d=1$.

МПС ВП и ФП для арифметической прогрессии с $d=1$ Таблица 2

Деления шкалы	1	2	3	4	5	6	Ценность деления	Приоритет	ФП
1	1	1	1	1	1	1	6	0,05405	0,19353
2	2	1	2	2	2	2	11	0,09910	0,35484
3	3	3	1	3	3	3	16	0,14414	0,51611
4	4	4	4	1	4	4	21	0,18919	0,67742
5	5	5	5	5	1	5	26	0,23423	0,83869
6	6	6	6	6	6	1	31	0,27928	1,00000

¹ Ему соответствует единичная диагональная матрица.

3. Создание нелинейных функций полезности

Создание нелинейной функции полезности обеспечивается за счёт изменения полезности при переходе к следующему делению шкалы: $\Delta u(y) = \text{var}$. Это изменение может отражать либо известную закономерность, либо задаваться экспертом.

Учитывая тот факт, что матрица имеет дискретную структуру, для заполнения её клеток можно использовать члены рядов. Это допустимо по той причине, что содержимое матриц парных сравнений с согласованными предпочтениями вычисляется на основе вектора приоритетов размерности $N-1$. Такие матрицы называют сверхтранзитивными [6].

Косвенное задание функции полезности через члены ряда гораздо проще, чем прямое задание функции полезности в абсолютной шкале. Вектор приоритетов может сопоставляться $N-1$ делениям шкалы, либо вводиться в клетки матрицы, соответствующие гамильтонову пути в соотнесенном графе.

Первый способ реализуется в матрице «Выигрыши/потери» по примеру таблицы 2. Один из методов однозначного заполнения пустых клеток матрицы на основе гамильтонова пути предложен в работе [5] для матриц с кратными предпочтениями (в разгах).

К наиболее простым нелинейным закономерностям относится геометрическая прогрессия с постоянным знаменателем (шагом) q . Её примером является последовательность 2, 4, 8, 16, 32, 64,.... Примером чисел, получаемых на основе суммирования переменных приращений, относятся числа Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8,....

Нелинейная ФП может быть получена не только изменением приращения полезности, но и изменением вида предпочтения и параметров расчёта приоритетов. На рис.2 приведены примеры двух вогнутых ФП, характеризующих несклонность ЛППР к риску. Верхняя кривая получена преобразованием предпочтений в матрице из табл. 2 от «Выигрыши/потери» к долям единицы [4]. Нижняя кривая с увеличенной крутизной получена при возведении матрицы в степень $k \gg 1$ (учёт сил сущностей).

В тех случаях, когда предпочтения не подчиняются известной закономерности, они формируются обычным экспертным путём, порождая как монотонные, так и немонотонные функции полезности.

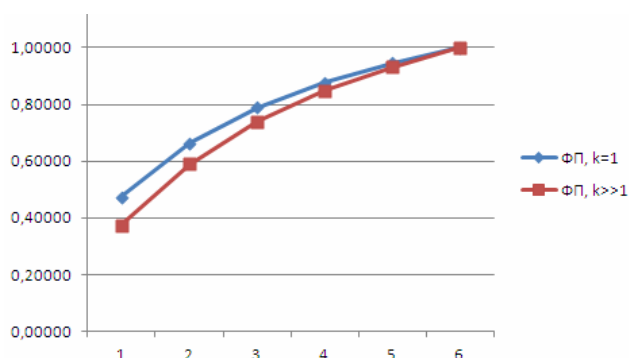


Рис. 2. Нелинейные ФП, полученные на основе арифметической прогрессии

4. Создание функции полезности для показателя, измеренного в номинальной шкале

В задачах многокритериального выбора часто участвуют критерии, измеренные в номинальной шкале. Например, качество изделия может характеризоваться фирмой-изготовителем. Для перехода от номинальной оценки качества изделия к численной экспертной оценке обычно используется порядковая, либо балльная шкала ценности. Матрицы парных сравнений предоставляют возможность вычисления дискретной функции полезности (ценности) на основе объективных данных о фирмах. В рассматриваемом примере к такой информации относится объём продаж, пропорциональный качеству изделий, выпускаемых фирмой. На основе вектора объёмов продаж вычисляется содержимое МПС ВП, которое используется для расчёта приоритетов фирм с последующим их преобразованием в значения функции полезности.

Для получения оценки сущностей, взаимодействующих в шкале «Выигрыши/потери», используется всё содержимое матрицы. Примером таких сущностей могут быть родственные фирмы, приобретающие друг у друга патенты. Продажа патента трактуется как выигрыш, а покупка – как потеря. В табл. 3 приведён пример такого взаимодействия фирм.

Граф, соотнесённый матрице из табл. 3, содержит 12 циклов из 20-ти возможных, что свидетельствует о низкой согласованности предпочтений (40%). Плохая согласованность порождает немонотонное изменение приоритетов при изменении степени матрицы от нуля до четырёх в логарифмической шкале (см. рис. 3а). Поэтому значения приоритетов берутся для установившегося соотношения, т.е. с учётом «сил сущностей» [6]. Соответствующие им значения функции полезности приведены в правом столбце табл. 3, а графическое изображение функции представлено на рис. 3б.

Изображённая на рисунке 4 функция полезности на шкале номеров фирм получилась немонотонной по той причине, что шкала является номинальной, а не порядковой. Однако немонотонная ФП может быть получена и на порядковой шкале. Условием получения немонотонной ФП является меньшая значимость следующего деления. Горизонтальные участки функции полезности обуславливаются равнозначностью соседних делений шкалы.

Фирма	1	2	3	4	5	6	Ценность фирмы	ФП, $k=1$	ФП, $k \gg 1$
1	1	3	2	4	1	2	13	1,00000	0,96856
2	1	1	2	1	2	1	8	0,61537	0,60111
3	4	2	1	3	1	2	13	1,00000	1,00000
4	3	1	4	1	2	1	12	0,92305	0,94803
5	1	3	2	2	1	1	10	0,76921	0,72655
6	3	1	1	3	2	1	11	0,84616	0,85077
Орциклы	5	7	7	6	5	6			

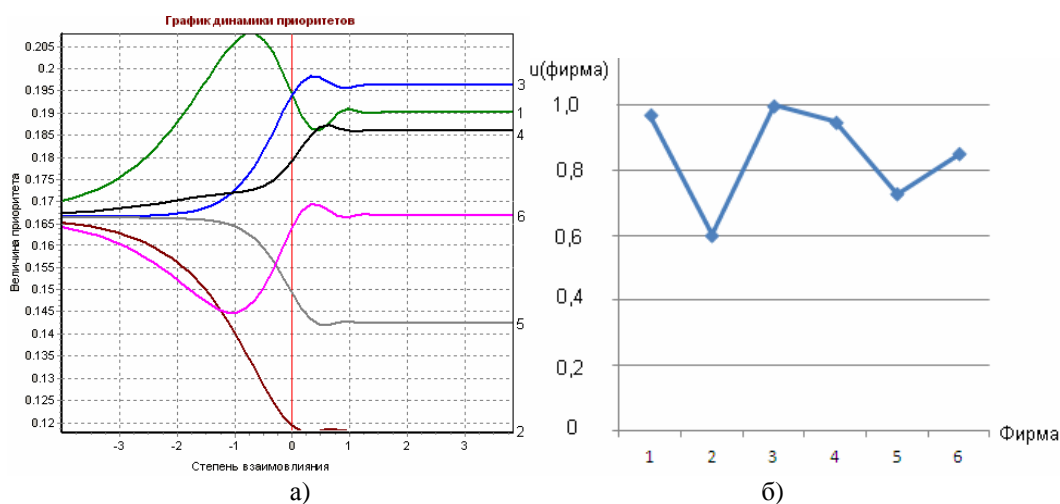


Рис. 3. а - график приоритетов фирм, б - немонотонная функция полезности фирм

Заключение

В работе предлагается дополнить два известных способа построения функций полезности – по лотереям и приращениям функции полезности – третьим способом – формированием отношения предпочтения на множестве делений шкалы показателя. Применение с этой целью матриц парных сравнений позволяет заменить неудобное для лица, принимающего решение, задание функции полезности в абсолютной шкале (обыкновенными дробями) естественными численными оценками предпочтений на делениях шкалы показателя.

Расчёт значений функции полезности выполняется автоматически через вычисление приоритетов делений шкалы с последующей их нормализацией. Создание функции полезности на основе МПС упрощается, если известна закономерность ценности делений шкалы, представленная в виде производящей функции.

Применение матриц парных сравнений даёт большой простор для автоматической подстройки функции полезности за счёт замены производящей функции, изменения вида предпочтений и значений параметров, применяемых для расчёта приоритетов сущностей.

Применение матриц парных сравнений обеспечивает удобное создание функций полезности для показателей, измеряемых в номинальной шкале.

Литература

1. Нейман Д., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. –М.: Наука, 1970.
2. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. – М.: Радио и связь, 1981. – 559 с.
3. Микони С.В., Бураков Д.П. Итеративное проектирование функций полезности // Сборник научных трудов международной научной конференции ISDMCI 2011, –Херсон: ХНТУ, 2011, том 1, стр. 188-192.
4. Микони С.В. Многокритериальный выбор на конечном множестве альтернатив. Учебное пособие. – СПб.: Лань, 2009, 272 с.
5. Киселёв И.С. Модели и алгоритмы анализа различных типов экспертных предпочтений на основе матриц парных сравнений // Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. –СПб.: ПГУПС, 2011, 18 с.
6. Миркин Б.Г. Проблема группового выбора. –М.: Наука, 1974.