ISSN 2078-9181

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Отделение нанотехнологий и информационных технологий

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ИНСТИТУТ ИНФОРМАТИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ РАН

ТРУДЫ СПИИРАН

Выпуск № 3(22)

Санкт-Петербург
2012

УДК 519.81

М.И. Гарина

ПРИМЕНЕНИЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ОБОБЩАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ АГРЕГИРОВАНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ С ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ И ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ПОЛЕЗНОСТЬЮ

Гарина М.И. **Применение мультипликативной обобщающей функции для агрегирования показателей с положительной и отрицательной полезностью.**
Аннотация. В статье обосновывается применение знакопеременных функций полезности и решается вопрос обобщения их значений с целью многокритериального упорядочения объектов. В том числе рассматривается возможность применения мультипликативной обобщающей функции, и решаются возникающие при этом проблемы.
Ключевые слова: знакопеременная функция полезности, мультипликативная обобщающая функция.

Garina M.I. **Multiplicative convolution application to attributes having both negative and positive utility values.**
Abstract. The signed utility functions application is substantiated in this paper. The problem of their values' convolution for multicriteria ordering is solved, including the knowing whether the multiplivative convolution application is justified in this case.
Keywords: signed utility function, multiplicative convolution

1. Введение. Впервые знакопеременная функция полезности была синтезирована американскими исследователями Кини и Райфа [1] на основе лотерей и предназначалась для экономических показателей: отрицательной области соответствовали убытки предпринимателя. В [2] обсуждается применение знакопеременных функций полезности к показателям любой природы, для которых известно пороговое значение. На рис. 1 показан пример такой функции признака «Температура механизма» в задаче автоматического управления технической системой.

«Холодные» части механизма работают нестабильно, соответствующие значения характеризуются полезностью, близкой к нулю. При возрастании температуры до оптимальной полезность возрастает до 1. При дальнейшем возрастании температуры полезность медленно снижается, пока не достигнет нуля на пороговом значении температуры. После превышения порогового значения температуры механизм продолжает работать, но есть риск возникновения неисправности. Соответственно, высокие значения температур имеют отрицательную полезность.

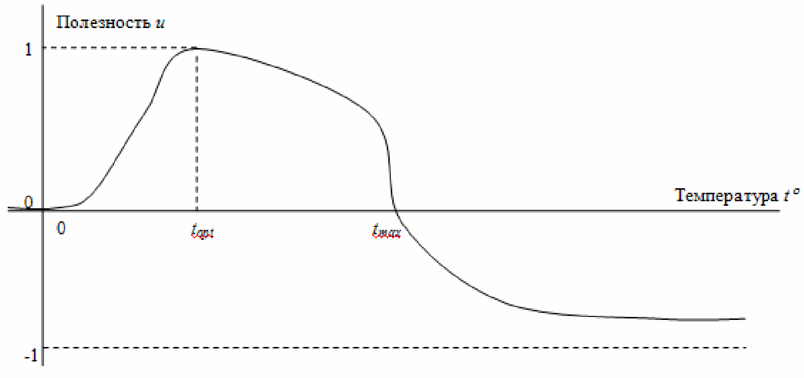

Рис. 1. Пример знакопеременной функции полезности.

Для агрегирования функций полезности многих показателей в многокритериальной теории полезности применяется аддитивная обобщающая функция (ОФ).

$$f_a = \sum_{j=1}^{n} u_j \cdot w_j$$

Здесь u_j – *полезность* j-го признака, а w_j – *важность* j-го признака, его весовой коэффициент.

Правомерность использования аддитивной ОФ обосновали Нейман и Моргенштерн [3]. Её преимуществом является возможность использования отрицательных полезностей «as is». С другой стороны, *эффект компенсации*, присущий аддитивной функции, может привести к тому, что выбранной может оказаться альтернатива, имеющая по части показателей нежелательно низкие значения полезности. Этот эффект обычно устраняется с применением мультипликативной обобщающей функции [4].

$$f_м = \prod_{j=1}^{n} u_j^{\,w_j}$$

Эта функция чувствительна к *равномерности* аргументов, и если эксперты считают объекты со средними полезностями по всем показателям предпочтительнее объектов с чередованием больших и малых (в том числе отрицательных) полезностей, рекомендуется использовать именно её. Но при мультипликативном агрегировании полезностей с различными знаками возникают две проблемы, решение которых предлагается в данной работе.

1. Взвешивание признаков сводится к вычислению дробных степеней отрицательных чисел.
2. При перемножении отрицательных множителей теряется знак.

2. Взвешивание признаков со знакопеременными функциями полезности. Каждый сомножитель мультипликативной ОФ представляет собой взвешенное значение функции полезности $u_j^{w_j}$, а степенная функция x^a с рациональным основанием $x \in \Re$ и показателем степени $a \in (0,1)$ не определена для отрицательных аргументов. Будем рассматривать x как комплексное число без мнимой части. Согласно формуле Муавра для извлечения корней из комплексного числа, существует n корней n-ной степени, $n \in \aleph$. При этом для числа x, не имеющего мнимой части, один и только один из корней тоже не будет иметь мнимой части, причем его знак будет совпадать со знаком рациональной части x. Например, на левой части рис. 2 показаны все 5 корней $\sqrt[5]{-32} = (-32)^{\frac{1}{5}}$.

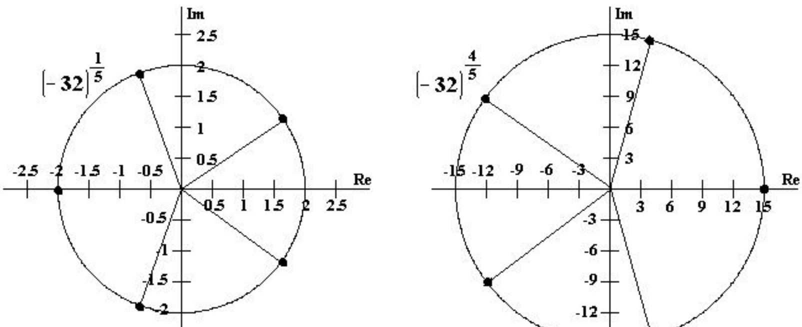

Рис. 2. Корни отрицательных чисел.

Следует учитывать, что в случае $x^{\frac{m}{n}}$, где n – нечетное, а m – четное, единственный результат, не имеющий мнимой части, будет всегда положительным, то есть, в случае $x < 0$ произойдет потеря знака (см. левую часть рис. 2). Отсюда следует, что и числитель, и знаменатель показателя степени должны быть нечетными. Значит, для корректного взвешивания знакопеременных функций полезности, весовые коэффициенты, должны быть представимы в виде $w_j = \dfrac{p_j}{q_j}$, где p_j и q_j – нечетные числа. При этом необходимо выполнить условие нормирования весовых коэффициентов: $\sum_j w_j = 1$. Оно вводится по двум причинам:

- обобщенная полезность должна лежать в том же интервале, что и частные полезности по признакам;
- при обобщении одинаковых полезностей u обобщенная полезность для обоих типов обобщающих функций должна быть равна u: $f_a = \sum_j u \cdot w_j = u \sum_j w_j = u$ и $f_M = \prod_j u^{w_j} = u^{\sum_j w_j} = u$.

Для *нечетного количества признаков* всегда можно подобрать w_j, представимые в виде простых дробей с нечетными числителем и знаменателем. В случае *четного количества* возникают две проблемы:

- равноважные признаки имеют весовые коэффициенты вида $\dfrac{1}{n}$, где n равно количеству признаков и является четным, что недопустимо;
- как минимум для одного из разноважных признаков всегда будет получаться весовой коэффициент вида $\dfrac{2m}{n}$ с четным числителем.

Одним из способов решения этих проблем является частичное выполнение условия нормирования. Пусть для $n-1$ признаков подобраны весовые коэффициенты, удовлетворяющие экспертным предпочтениям и представимые в виде $w_j = \dfrac{p_j}{q_j}$, где p_j и q_j – нечетные. Тогда для последнего признака подберем такое значение $\dfrac{p_n}{q_n}$, которое удовлетворяет требованию нечетности числителя и знаменателя и не отличается от $1-\sum_{j=1}^{n-1} w_j$ более, чем на заранее заданную погрешность. Тогда условие нормирования будет выполнено с той же погрешностью: $\sum_{j=1}^{n} w_j \approx 1$.

На основании изложенного, проблема взвешивания признаков со знакопеременными функциями полезности для обобщения с помощью мультипликативной ОФ решается следующим образом:

1. Весовые коэффициенты признаков точно удовлетворяют ***условию нормирования*** $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ для нечетного количества признаков и приближённо для четного: $\sum_{j=1}^{n} w_j \approx 1$.
2. Весовые коэффициенты признаков должны быть ***представимы в виде*** $w_j = \dfrac{p_j}{q_j}$, где p_j и q_j – нечетные числа.

При выполнении этих условий взвешивание ${u_j}^{w_j} = (u_j)^{\frac{p_j}{q_j}}$ отрицательного значения u_j будет давать q_j комплексных результатов, один из которых *всегда* будет лежать на отрицательной половине вещественной оси Re. Этот не имеющий мнимой части корень и предлагается использовать в качестве ***отрицательного вещественного*** результата взвешивания.

При подборе весовых коэффициентов нужно использовать экспертные предпочтения, учитывая, что для мультипликативной ОФ (в отличие от аддитивной) *большее значение* весового коэффициента задает *меньшую важность* признака. Организация подбора вектора весовых коэффициентов в соответствии с изложенными требованиями отличается от разработанного в [5] способа его подбора для аддитивной ОФ и является предметом дальнейших исследований.

3. Агрегирование отрицательных полезностей. Согласно теории элементарных функций следует, что в исходном виде мультипликативная функция неприменима для обобщения отрицательных аргументов.

Логарифмирование мультипликативной ОФ с знакопеременными функциями полезности влечёт взятие логарифма от отрицательного числа, что недопустимо:

$$f_M = \prod_{j=1}^{n} u_j^{w_j};$$

$$\ln f_M = \ln\left(\prod_{j=1}^{n} u_j^{w_j}\right) = \sum_{j=1}^{n} \ln\left(u_j^{w_j}\right) = \sum_{j=1}^{n} w_j \ln u_j;$$

$$f_M = e^{\sum_{j=1}^{n} w_j \ln u_j}$$

При обобщении знакопеременных функций полезности к *мультипликативной* ОФ предъявляются те же требования, что и для случая положительных функций полезности [6]:

- в паре объектов большую обобщённую полезность должен получить объект, доминирующий по Парето;
- в случае несравнимости объектов большей обобщенной мультипликативной полезностью обладает объект с более равномерным распределением частных полезностей.

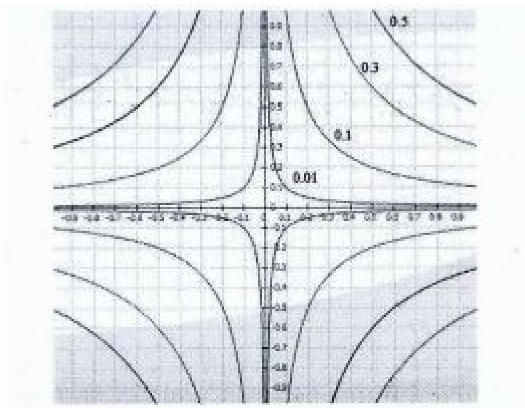

Рис. 3. Линии уровня мультипликативной ОФ.

На рис. 3 показаны линии уровня мультипликативной ОФ для двух признаков, веса которых для простоты без потери общности приняты равными 1 (при использовании нормированных весовых коэффициентов, подобранных в соответствии с правилами, изложенными в первой части доклада, линии уровня станут теснее прижиматься к началу координат). Рисунок показывает, что в случае двух отрицательных полезностей не выполняется ни одно из свойств. Одна из причин – потеря знака при перемножении отрицательных чисел. Обойти потерю знака можно, используя дополнения взвешенных отрицательных полезностей до 1:

$$f_M = \begin{cases} f_+ = \prod_{j=1}^{n} u_j^{\,w_j}, & u_j > 0 \\ f_- = \prod_{j=1}^{n} (1 + u_j^{\,w_j}), & u_j < 0 \end{cases}$$

На рис. 4 показаны линии уровня функции, вычисленной по этим правилам, причем при $i < j$ $f_{+j} > f_{+i}$ и $f_{-j} > f_{-i}$.

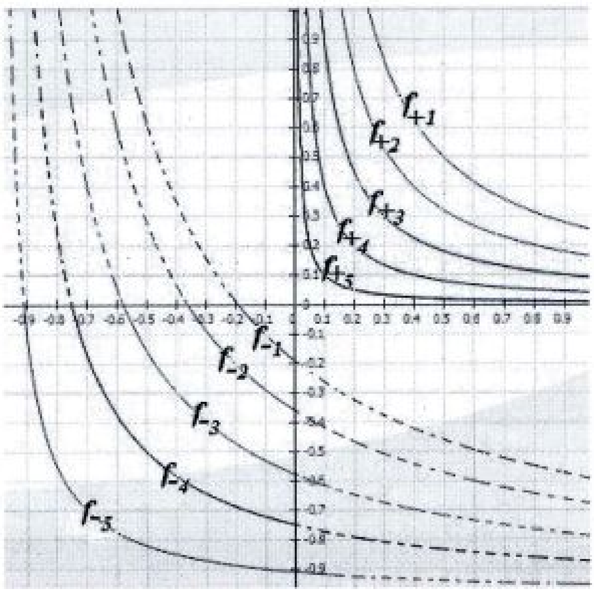

Рис. 4. Примерный ожидаемый вид линий уровня.

Требования мультипликативного обобщения выполняются как при агрегировании только положительных значений, так и только отрицательных. Поведение функции при агрегировании значений с разными знаками (показано на графике пунктиром) несущественно, так как функция считается не определенной для аргументов с разными знаками.

Итак, при наличии множества признаков со знакопеременными функциями полезности, предлагается все положительные полезности агрегировать по формуле $f_+ = \prod_{j=1}^{n} u_j^{w_j}$, а все отрицательные полезности – по формуле $f_- = \prod_{j=1}^{n} \left(1 + u_j^{w_j}\right)$.

Предложенный способ обобщения имеет следующие недостатки.

1. Обобщенная полезность в обоих случаях будет положительна, $f_+ \in [0,1]$, $f_- \in [0,1]$.
2. Функция определена только для аргументов с одинаковыми знаками, но в своей области определения f_M немонотонна, имеет разрыв первого рода в точке с нулевыми аргументами.
3. Вследствие того, что у разных объектов по одному и тому же признаку могут быть значения с разными знаками, для таких объектов обобщенные полезности будут вычисляться по разным формулам.
4. Нет обоснованного способа обобщения значений f_+ и f_-.

4. Варианты обобщения значений f_+ и f_-. Безопасней всего использовать значения f_+ и f_- в качестве исходных данных для ***лексикографического упорядочения***, причем у f_+ должен быть более низкий приоритет.

Можно было бы, учитывая положительность f_+ и f_-, вычислять обобщенную полезность ***по мультипликативной формуле*** $f_M = f_+^{w_+} \cdot f_-^{w_-}$, где $w_+ < w_-$ определяются экспертно и фиксируют вклад отрицательных частных полезностей в обобщенную полезность. Но такая f_M немонотонна, и рассмотренный ниже пример показывает, что не во всех случаях этот вариант является пригодным.

Сдвиг обобщенной полезности f_- на единицу $f_-^* = f_- - 1$ устраняет разрыв в точке с нулевыми аргументами, но при этом возникает проблема обобщения отрицательного значения f_-^* и положительного f_+, что является предметом дальнейших исследований.

Пример. Рассмотрим в качестве примера ранжирование 11 объектов, среди значений 5-ти признаков которых есть значения, имеющие как положительную, так и отрицательную полезность (см. таблицу 1). Значения частных функций полезности признаков приведены в левой части таблицы и подобраны так, чтобы продемонстрировать мультипликативный эффект компенсации. Веса признаков считаются равными (без потери общности и для простоты $w_j = 1$). Показаны обобщенные значения f_+ и f_-. В последнем столбце r_{lex} показан результат лексикографического упорядочения на f_+ и f_-. Показана обобщенная по мультипликативной формуле полезность f_M и рассчитанные на её основе ранги.

Пример упорядочения по мультипликативной ОФ с использованием знакопеременных функций полезности

	Признак 1	Признак 2	Признак 3	Признак 4	Признак 5	f_+	f_-	f_M	r_M	r_{lex}
Объект 3	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	1	0,99	1	1
Объект 1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1	0,933	2	2
Объект 11	**0,1**	**0,1**	**0,1**	**0,1**	**0,1**	**0,1**	**1**	**0,794**	**5**	**3**
Объект 9	**0,1**	**-0,1**	**0,5**	**0,5**	**0,5**	**0,42**	**0,98**	**0,899**	**3**	**4**
Объект 5	**0,5**	**0,5**	**0,5**	**0,5**	**-0,5**	**0,57**	**0,87**	**0,835**	**4**	**5**
Объект 6	0,5	0,5	0,5	-0,5	-0,5	0,66	0,76	0,747	6	6
Объект 7	0,5	0,5	-0,5	-0,5	-0,5	0,76	0,66	0,669	7	7
Объект 10	0,9	-0,9	0,1	0,1	0,1	0,25	0,63	0,574	8	8
Объект 8	0,5	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5	0,87	0,57	0,599	9	9
Объект 2	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5	1	0,5	0,536	10	10
Объект 4	-0,9	-0,9	-0,9	-0,9	-0,9	1	0,1	0,126	11	11

Ни для одной пары объектов лексикографическое упорядочение не противоречит графу доминирования (см. рис. 5). При этом среди несравнимых объектов соблюдается требование предпочтения объектов с более равномерно распределенными значениями полезности по признакам. Результаты упорядочения по f_M отличаются (см. объекты 11, 9 и 5, для которых указанное требование не соблюдается).

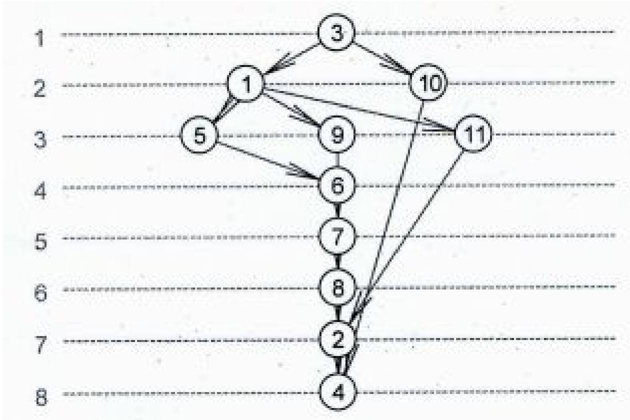

Рис. 5. Граф доминирования для рассмотренного примера.

7. Заключение. В статье решается задача мультипликативного обобщения значений знакопеременных функций полезности. Предложен способ взвешивания и мультипликативного обобщения как отрицательных, так и положительных значений с сохранением ожидаемых свойств мультипликативной обобщающей функции. Предлагаются два возможных варианта упорядочения объектов по результатам обобщения. Предметом дальнейших исследований является организация подбора весовых коэффициентов для мультипликативной обобщающей функции с учетом экспертных предпочтений и исследование способов упорядочения объектов по двум обобщенным функциям полезности f_+ и f_-. Все эксперименты проводились с использованием системы выбора и ранжирования СВИРЬ-Р.

Литература

1. *Кини Р.Л., Райфа Х.* Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. М.: Радио и связь, 1981.
2. *Микони С.В.* Построение функций полезности на основе метода приближения к образцу // Сборник трудов 1-й международной научно-практическая конференции «Интеллектуальные системы на транспорте», –СПб.: ПГУПС, 2011 с. 294-300.
3. *Нейман Дж., Моргенштерн О.*, Теория игр и экономическое поведение, пер. с англ. М.: Наука, 1970.
4. *R.L. Keeney*. Multiplicative utility functions. Operations Research, 22, №1, 22–34, 1974
5. *Микони С.В., Киселёв И.С.* Универсальный алгоритм расчёта приоритета сущностей для разных типов предпочтений // Сб. докл. Междунар. конф. SCM’2005. СПб.: СПбГЭТУ, 2005. Т. 1. С. 291–296.
6. *Микони С.В.* Многокритериальный выбор на конечном множестве альтернатив: Учебное пособие. СПб.: Лань, 2009.

Гарина Марина Игоревна – кандидат технических наук; доцент кафедры «Математика и моделирование» Петербургского государственного университета путей сообщения (ПГУПС). Область научных интересов: многокритериальная теория полезности, многокритериальный выбор и классификация, интеллектуальные технологии разработки комплексов программ. Число научных публикаций – 42. MIGarina@gmail.com; ФГБОУ ВПО ПГУПС, Московский пр, 9, Санкт-Петербург, 190031, РФ; р.т. +7(812)572-6117.

Marina I. Garina – PhD, associate professor of “Mathematics and Modeling” of Saint-Petersburg State Transport University. Scientific interests: multicriteria utility theory, multicriteria decision, intelligent technologies. The number of scientific publications: 42. MIGarina@gmail.com; Saint-Petersburg State Transport University, Moskovsky pr, 9, Saint-Petersburg, 190031, Russia; phone: +7(812)572-6117.

Поддержка исследований. В публикации представлены результаты исследований, поддержанные грантом РФФИ 10-01-00439, рук. С.В. Микони.

Рекомендовано кафедрой «Математика и моделирование» ФГБОУ ВПО ПГУПС, заведующий кафедрой Ходаковский В.А., д-р техн. наук, проф.;

Рекомендовано СПИИРАН, директор Юсупов Р.М., чл.-корр. РАН.
Статья поступила в редакцию 31.05.2012.

РЕФЕРАТ

Гарина М.И. **Применение мультипликативной обобщающей функции для агрегирования показателей с положительной и отрицательной полезностью.**

Впервые знакопеременная функция полезности была синтезирована американскими исследователями Кини и Райфа на основе лотерей и предназначалась для экономических показателей: отрицательной области соответствовали убытии предпринимателя. Сейчас очевидно, что отрицательная полезность применима к показателям любой природы, для которых известно пороговое значение.

Для агрегирования функций полезности показателей в многокритериальной теории полезности применяется аддитивная обобщающая функция (ОФ). Правомерность её использования обосновали Нейман и Моргенштерн. Одним из свойств аддитивной ОФ является эффект компенсации, в силу которого лучшей может оказаться альтернатива, имеющая по части показателей нежелательно низкие значения полезности.

Мультипликативная ОФ, напротив, чувствительна к однородности аргументов, и если эксперты считают объекты со средними полезностями по всем показателям предпочтительнее объектов с чередованием больших и малых (в том числе отрицательных) полезностей, рекомендуется использовать именно её. Но при агрегировании полезностей с различными знаками возникают две проблемы, решаемые в статье: дробные степени отрицательных чисел и потеря знака при перемножении отрицательных множителей.

Первая проблема может быть решена приближенными вычислениями или особенным подбором весовых коэффициентов. Решение второй проблемы сводится к агрегированию положительных и отрицательных полезностей отдельно с последующим обобщением. Отрицательные полезности агрегируются по модифицированной формуле, сохраняющей чувствительность мультипликативной ОФ к однородности аргументов.

SUMMARY

Garina M.I. **Multiplicative convolution application to attributes having both negative and positive utility values.**

For the first time a signed utility function was synthesized by American researchers, Keeney and Raiffa, based on lotteries. They were intended for economic attributes and negative values of function were understood as damages. Now it's clear that signed utility functions are applicable for any attributes having specified threshold.

The Multicriteria Utility Theory uses additive convolution to convert a vector of attribute values into a scalar value. The legitimacy of using such convolution was justified by Neumann and Morgenstern. One of the properties of the additive convolution is the compensation. It means that the alternative having the desirable low utility values of the part of attributes can therefore take the best place in the ranking.

On the contrary the multiplicative convolution is sensitive to the homogeneity of the arguments. If you have an expert opinion that alternatives having average utility values of all attributes are better than having alternating high and low utility values (including negative), then the multiplicative convolution is recommended. But in this case there are problems that have to be solved in this paper. First, we are talking about fractional powers of negative values and second, about loss of the sign of the product of negative factors.

The first problem can be solved by approximate calculation or special choice of attributes' weights. The second problem can be solved by convolution separately positive and negative utility values with f with subsequent merging of the results. The negative values should be aggregated with the modified formula preserving multiplicative convolution's sensitivity to the homogeneity of the arguments.