СОКРАЩЕНИЕ РАЗМЕРНОСТИ ЗАДАЧ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ

Бураков Д.П., Микони С.В.
(Санкт-Петербург, Петербургский государственный университет путей сообщения)

DECREASING DIMENSION OF MULTICRITERIA ESTIMATION TASKS

Burakov D.P., Mikoni S.V
(Saint-Petersburg, Petersburg State Transport University)

In this paper is considered the problem of inclusion the dependent criteria into task of multi-attribute objects estimation. Methods to take into account these dependencies and decrease the task's dimension are discussed. The creation of combination of utility functions of deleted criteria is proposed. Also is shown that if the task contains the criteria with non-linear utility functions, it is indicates that there are dependent criteria. This fact gives a chance to make decomposition of the combined function in order to detect criteria, implicitly used by the decision maker.

1. Постановка задачи. Для упорядочения множества объектов $X = \{x_1, \ldots, x_N\}$, характеризующихся вектором признаков $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ будем использовать порядок, получаемый на множестве их векторных оценок $Y = \{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_N\}$, где каждая векторная оценка $\mathbf{y}_i$ образуется из оценок объекта x_i по всем признакам: $\mathbf{y}(x_i) = (f_1(x_i), \ldots, f_n(x_i))$. Для получения на множестве Y линейного порядка, отражающего предпочтения лица, принимающего решения (ЛПР), на основе каждого признака задается критерий, представляющий собой функцию, отображающую выборочную шкалу признака в отрезок [0, 1] и определяющую на ней порядок, соответствующий направлению возрастания функции. Такую функцию $u(f_j(x))$ назовем функцией полезности (ФП) [1]. В простейшем случае она представляет собой просто функцию нормализации значений признака, используемую для скаляризации векторных оценок объектов. После формирования частных ФП, для каждой нормированной векторной оценки $\mathbf{y}'_i = (u_1(f_1(x_i)), \ldots, u_n(f_n(x_i)))$ может быть вычислена агрегированная скалярная оценка y^*_i, для чего используется, например, аддитивная агрегирующая функция (АОФ) [2]:

$$y^*_i = \sum_{j=1}^{n} u_j(f_j(x_i)) \cdot w_j \, , \tag{1}$$

где w_j – весовые коэффициенты ($w_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$), определяющие, с точки зрения ЛПР, относительную важность критериев.

В данной модели предполагается, что набор критериев, используемых для получения общей оценки, полон, не избыточен, кроме того, критерии независимы друг от друга. Однако, в силу субъективного подхода к формированию перечня признаков, это требование на практике часто нарушается. Признаками избыточности перечня признаков являются наличие противоречащих или сильно зависимых критериев. Мера зависимости двух критериев определяется посредством коэффициента их парной корреляции (Пирсона или Кендалла), для чего составляется симметричная корреляционная матрица $\mathbf{R}$ [3]. Большие значения коэффициентов парной корреляции свидетельствуют о взаимосвязи критериев.

Поскольку корреляция определяет лишь взаимосвязь значений двух векторов, то ее ненулевое значение может сигнализировать о следующих ситуациях:

- Критерии связаны функциональной зависимостью.
- Критерии связаны статистически на данной выборке объектов X.

Функциональная связь между критериями может быть полной и частичной. Полная связь характеризуется функцией одного аргумента, а частичная связь – функцией нескольких аргументов. Так, например, объём любого физического тела пропорционален его длине, ширине и толщине. Поскольку любой из этих параметров вычисляется через три остальные, в качестве критериев достаточно использовать три из четырёх параметров.

Случайная зависимость критериев выявляется по их смысловой связи. Например, несмотря на выявленную большую величину коэффициента парной корреляции с прагматической точки зрения вряд ли стоимость изделия может существенно зависеть от его цвета. Следовательно, оба признака должны использоваться при оценивании.

По высоким значениям коэффициентов парной корреляции следует принимать решения об участии сильно связанных критериев в модели выбора. В работе обсуждаются способы сокращения размерности модели за счёт сильно зависимых критериев.

Функции нормализации, принимаемые за функции полезности, являются монотонными линейными (возрастающими или убывающими). Однако может иметь место не только нелинейность, но и немонотонность ФП [4]. Представляется, что нелинейность и немонотонность ФП также являются следствием влияния на полезность значений одного критерия значений другого критерия (либо уже учтенного ЛПР в данной задаче, либо не учтенного, но косвенно влияющего на его предпочтения). В случае если ФП некоторого критерия представляет собой монотонную, но нелинейную функцию (выпуклую или вогнутую), это может означать, что на полезность значений одного признака влияет изменение полезности по другому признаку, изменяющемуся согласованно, т.е. между этими критериями должна иметь место положительная парная корреляция. Если функция полезности показателя не монотонна, то она является некоторой композицией как минимум двух противоречащих друг другу критериев, т.е. критериев, связанных обратной зависимостью, которую можно определить по наличию между ними отрицательной парной корреляции. Примеры таких функций показаны на рисунке 1.

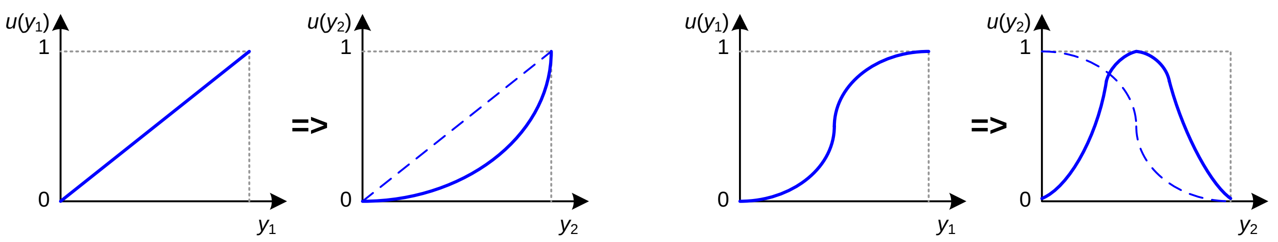

Рис. 1. Примеры возникновения нелинейных ФП

2. Понижение размерности. В случае если установлено, что некоторая пара критериев характеризуется прямой линейной зависимостью ($r_{ij} = 1$), то один любой из этих двух критериев можно исключить из задачи, передав его весовой коэффициент критерию, оставляемому в задаче: $w'_i = w_i + w_j$. Если зависимость прямая, но не линейная, т.е.$0 < r_{ij} < 1$, то веса критериев в паре перераспределяются таким образом, что более важному критерию добавляется доля веса, пропорциональная величине зависимости: $w'_i = w_i + r_{ij} \cdot w_j$. В случае если зависимость обратная, т.е. если $r_{ij} = -1$, то в случае равенства весов критерии полностью взаимно компенсируют друг друга и поэтому исключаются из задачи оба. В противном случае в задаче оставляется более важный критерий.

3. Комбинирование ФП. Покажем, что этого же эффекта можно достичь, если произвести замену функции полезности одного из критериев на выпуклую линейную комбинацию функций полезности зависимых критериев, исключив из задачи все критерии, которые использовались для агрегации. Замена ФП производится следующим образом:

1. Функция полезности $u^*(x)$ является выпуклой линейной комбинацией функций полезности $u_j(x)$ агрегируемых критериев: $u^*(x) = \sum_{j \in I} w_j^* \cdot u_j(x)$, где I – множество номеров агрегируемых критериев.
2. Вес w_k^* определяется как доля веса k-го критерия сумме весов объединяемых критериев: $w_k^* = \dfrac{w_k}{\sum_{j \in I} w_j}$.

Введение выпуклых линейных комбинаций допустимо в силу того, что фактически это сводится к перегруппировке слагаемых агрегирующей функции, и не влияет на результат по причине коммутативности и ассоциативности суммирования. Легко убедиться, что для основных случаев (полная линейная зависимость и противоречие критериев) результат агрегации совпадает с результатом исключения критериев из задачи:

1) Если два критерия f_1 и f_2 с обладают одинаковыми ФП ($r_{12} = 1$), то в результате преобразования один из них получит вес, равный их суммарному весу, а его функция полезности останется неизменной: $u^*_1(x) = w^*_1 u_1(x) + (1 - w^*_1) u_1(x) = u_1(x)$.
2) Если два критерия обладают противоположными ФП ($r_{12} = -1$), то в результате построения выпуклой комбинации получается функция, принимающая значения от наибольшего до наименьшего из весов w_1, w_2, в случае равенства весов она обращается в константу, что соответствует полной взаимной компенсации противоречивых критериев.

Более того, для агрегации не играет роли, имеется ли вообще зависимость между критериями, тем самым имеется возможность за счет агрегирования уменьшать размерность задачи, что может быть полезно в ряде случаев. Например, таким образом возможно заменить набор одних критериев другим критерием, для чего достаточно ввести в задачу дополнительный признак, в качестве ФП которого использовать функцию, являющуюся линейной комбинацией функций полезности исключаемых признаков. Очевидно, что этой функцией будет являться сумма, вычисленная по исключаемым признакам.

Рассмотрим пример. Пусть имеется 5 объектов, характеризуемых четырьмя признаками. При этом первые три признака используются в задаче в качестве критериев оценивания. Для простоты будем считать, что по всем трем признакам ЛПР заданы линейные возрастающие ФП, а веса признаков – равные. Исходные данные и результаты оценивания приведены в табл. 1.

Хорошо видно, что признаки П1 и П2 (и их линейные ФП) связаны прямой линейной зависимостью, а признак П3 связан с ними обоими отрицательной линейной зависимостью. В столбце **∑(П1,П2,П3)** представлен результат оценивания объектов АОФ (1), учитывающей все три признака. Ясно, что исключение из задачи признака П1 или признака П2 с передачей его веса оставляемому признаку результата не изменит, что и показано в столбце **∑(П1',П3)**. Кроме того, всю тройку критериев можно заменить на обобщенный критерий, построенный на шкале любого из трех признаков (в данном примере – на шкале признака П3). Функция полезности этого критерия будет иметь вид $u^*_3(x) = 2/3u_1(x)+1/3u_3(x)$. Результат такого упорядочения показан в столбце **∑(П3')**.

Табл. 1. Пример оценивания объектов

w	0,33	0,33	0,33				
	П1	**П2**	**П3**	**П4**	**∑(П1,П2,П3)**	**∑(П1',П3)**	**∑(П3')**
O1	1	2	2,5	2001	0,3333	0,3333	0,3333
O2	2	3	2	2002	0,4167	0,4167	0,4167
O3	3	4	1,5	2009	0,5000	0,5000	0,5000
O4	4	5	1	2011	0,5833	0,5833	0,5833
O5	5	6	0,5	1998	0,6667	0,6667	0,6667

Аналогичных результатов упорядочения можно добиться, если настроить на шкале признака П4 функцию полезности, значениями которой являются значения обобщенных оценок, представленных в таблице. Вид этой ФП показан на рисунке 2.

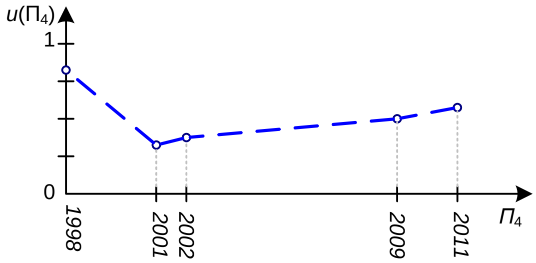

Рис. 2. Функция полезности признака П4.

4. Учет функциональной зависимости. В задачу могут быть включены признаки, связанные функциональной зависимостью с другими признаками (как в приведенном выше примере связи между объемом, шириной, длиной и высотой объекта). В случае если эти признаки, от которых функционально зависит некоторый признак, в свою очередь также являются взаимозависимыми, имеется возможность устранить из задачи как функционально зависимый признак, так и избыточные аргументы, от которых он зависит, оставив в задаче один любой из них. Рассмотрим в качестве примера простейший случай, когда оцениваются объекты, представляющие собой параллелепипеды, и в задачу включены для оценивания как объем, так и все геометрические измерения объекта. Функциональная зависимость объема от трех измерений в этом случае определяется по простой формуле $V = h{\cdot}w{\cdot}d$, где h, v и d – высота, ширина и глубина объекта соответственно. Если все три измерения связаны положительной зависимостью, т.е. все три измерения растут согласованно, то использование линейной ФП для признака «объем» равносильно использованию для любого из измерений выпуклой функции полезности $u(x) = x^3$. Т.е. в данном случае можно сократить размерность задачи, оставив в ней для оценивания либо только вычисленный объем, либо любой из признаков, характеризующих одно из измерений, построив для него нелинейную ФП, которая и будет учитывать в задаче наличие функциональной зависимости объема от измерений.

Таким образом, наличие в задаче критериев, задаваемых нелинейными (и тем более – немонотонными) функциями полезности, сигнализирует о наличии в задаче критериев, влияющих друг на друга, причем это влияние было учтено ЛПР. Это означает, что можно выполнить обратную «декомпозицию» сложной функции полезности, разложив ее на композицию простых, и восстановив картину взаимодействия критериев, реально используемых ЛПР для оценивания объектов.

Заключение. В задачах оценивания объектов по многим признакам, нередки ситуации, когда признаки, принятые ЛПР, взаимозависимы. В таких случаях может выполняться понижение размерности задачи исключением ряда критериев с настройкой для оставшихся новой функции полезности, учитывающей зависимость между критериями и важность исключаемых критериев. Кроме того, может решаться и обратная задача восстановления по сложной функции полезности исходного набора критериев с простой структурой предпочтения, которые были агрегированы ЛПР в функцию нелинейного вида.

Литература

1. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. – М.: Радио и связь, 1981. – 559 с.

2. Микони С.В. Многокритериальный выбор на конечном множестве альтернатив. Учебное пособие. – СПб.: Лань, 2009, 272 с.

3. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для вузов. – Москва: Высшая школа, 2004, 479 с.

4. Микони С.В., Бураков Д.П. Итеративное проектирование функций полезности // Сборник научных трудов международной научной конференции ISDMCI'2011, –Херсон: ХНТУ, 2011, том 1, стр. 188-192.

Труды XIX-й Байкальской Всероссийской конференции "Информационные и математические технологии в науке и управлении", 30.06-07.07. 2014 г., Иркутск, Изд-во ИСЭМ СО РАН 2014, стр. 17-22.