

С.В. Микони\*

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ВЫБОРА С УЧЁТОМ РЕСУРСОВ ЛПР†

---

**Аннотация.** Отмечается важная роль предпочтений лица, принимающего решение, в создании модели выбора. Указывается противоречивость увеличения объёма предпочтений, улучшающего достоверность оценивания, и одновременно увеличивающего трудоёмкость создания модели. Предлагается усиление роли системного аналитика в создании модели. Методология, основанная на системном анализе моделей и методов выбора, позволяет сократить трудоёмкость создания модели выбора.

**Ключевые слова:** модель выбора, предпочтения ЛПР, идеальная и реальная цели, целевой и ограничительный критерий, нормирующая функция, функция полезности.

---

**1. Введение.** В модели выбора важная роль принадлежит той её части, которая отражает предпочтения лица, принимающего решение (ЛПР). Составляющая модели, представляющая свойства оцениваемых альтернатив (вариантов, объектов), сама по себе нейтральна. А вот предпочтения, формулируемые на совокупности этих свойств, у каждого ЛПР могут быть своими. Способы сбора и обработки предпочтений определяют разнообразие методов принятия решений.

Проблема определения объёма предпочтений в модели выбора внутренне противоречива. С одной стороны, увеличение объёма предпочтений и их анализа повышает доверие ЛПР к создаваемой модели выбора, и, следовательно, должно способствовать увеличению достоверности оценивания. С другой стороны, даже не принимая во внимание субъективизм экспертных оценок, возрастает трудоёмкость процесса оценивания. Наибольшего объёма экспертных оценок требуют логические методы выбора, не использующие вычислительных процедур [1].

На качество экспертных оценок влияет квалификация экспертов. Привлечение к созданию модели выбора высококвалифицированных экспертов влечёт потерю времени и удорожание модели.

Разрешению указанной проблемы может способствовать усиление роли системного аналитика. Зная разнообразие методов выбора и их особенности, системный аналитик может выбрать такое их сочетание или последовательность, которое позволит снизить объём экспертных оценок. Настоящая работа посвящена изложению такого подхода, основанного на системном анализе моделей и методов выбора.

---

\* Микони Станислав Витальевич — д.т.н., профессор, svm@sm4265.spb.edu; Петербургский государственный университет путей сообщений, Санкт-Петербург.

† В работе представлены результаты исследований, поддержанные грантом РФФИ 13-01-00912, рук. С.В. Микони

**2. Модель выбора.** Модель выбора альтернативы делится на следующие части:

- 1) модель-прототип предметной области (ПО);
- 2) модель-экземпляр;
- 3) модель предпочтений ЛПР;
- 4) модель метода решения задачи выбора;
- 5) модель результата решения задачи выбора.

**Модель-прототип** многокритериального выбора представляет собой прямое произведение:  $X \times F$ , где  $X = \{x_1, \dots, x_i, \dots, x_N\}$  — множество альтернатив,  $F = \{f_1, \dots, f_j, \dots, f_n\}$  — множество свойств (признаков) каждой альтернативы, измеренных в некоторых шкалах. Эта модель представляется таблицей «Объекты/Признаки»  $T_n$  с пустыми клетками.

**Модель-экземпляр** выражается функцией  $\varphi: X \times F \rightarrow Y$ , где  $Y$  — множество значений признаков в таблице  $T_n$ . Значение  $y_j$   $j$ -го признака измеряется в шкале  $[y_{j,\min}, y_{j,\max}]$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Модель-экземпляр представляется таблицей  $T_n$  с клетками, заполненными в процессе сбора информации об объектах выбора.

**Модель предпочтений ЛПР** имеет две разновидности: прямую и аналитическую.

**Прямая** модель  $R_{\subseteq} \subseteq X \times X$  отражает *целостное* восприятие объектов лицом, принимающим решение. Объекты попарно сравниваются между собой в целом без явного учёта их свойств (имплицитно).

**Аналитическая модель** отражает в явном виде (эксплицитно) все свойства, характеризующие объект, и предъявленные к ним требования, либо через критерии (многокритериальная модель):

$$R_c \subseteq P_1 \times \dots \times P_j \times \dots \times P_n,$$

либо через функции полезности  $U = \{u_1, \dots, u_j, \dots, u_n\}$  (многомерная модель полезности):

$$R_u \subseteq u_1 \times \dots \times u_j \times \dots \times u_n.$$

Критерий выражается в виде *оценочной функции*, представленной двухместным предикатом предпочтения (или соответствия)  $P_{\geq}(f_j(x_i), c_j)$ . Первым аргументом предиката является фактическое значение  $y_{ij} = f_j(x_i)$   $j$ -го признака  $i$ -го объекта  $x_i$ , а вторым аргументом – требуемое (целевое) значение  $c_j$   $j$ -го признака, измеряемое в той же шкале, что и  $f_j(x_i)$ . Предикат воспринимает первый аргумент как *оцениваемое* свойство объекта, а второй аргумент – как *базу сравнения*.

При создании многокритериальной модели ЛПР задаёт свои предпочтения вектором целей  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_j, \dots, c_n)$ . Цели делятся на идеальные и реальные [1].

При задании *идеальной* цели значение  $c_j$  приравнивается к одной из границ шкалы показателя  $[y_{j,\min}, y_{j,\max}]$  в зависимости от вида целевой функции (*целевого критерия*). Так, например, максимизации  $j$ -го признака соответствует предикат  $P_{>}(f_j(x_i), y_{j,\min})$ , т.е.  $c_j = y_{j,\min}$ . В оптимизационных задачах целевая функция обозначается как  $f_j(x_i) \rightarrow \max$ .

*Реальная* цель по  $j$ -му признаку задаётся внутри шкалы  $[y_{j,\min}, y_{j,\max}]$ :  $y_{j,\min} < c_j < y_{j,\max}$ . Ограничение «снизу» представляется предикатом  $\geq(f_j(x_i), c_j)$ , а «сверху» – предикатом  $\leq(f_j(x_i), c_j)$ . Этими предикатами так же, как и целевым критерием, задаётся направленность предпочтения, что даёт формальное основание критерию этого типа называть *ограничительными*<sup>‡</sup>. Содержательно ограничения играют роль критериев в задаче формирования области допустимых альтернатив, которая относится к задачам выбора. Выявление предпочтения между двумя объектами  $x_i$  и  $x_k$  по  $j$ -му признаку описывается предикатом  $\succ(f_j(x_i), f_j(x_k))$  с  $f_j(x_k)$  в роли базы сравнения, а предпочтение « $\succ$ » при количественных оценках  $j$ -го признака принимает значения из множества  $\{>, \geq, <, \leq\}$ .

Помимо ограничений «снизу» и «сверху» в формировании области допустимых альтернатив могут участвовать точечное и интервальное ограничения, представляемые предикатами *соответствия*:  $P_{=} = (f_j(x_i), c_j)$  и  $P_{||} = (f_j(x_i), c_{j,\text{н}}, c_{j,\text{в}})$ . Они используются в задачах классификации. Принадлежность величины  $f_j(x_i)$  интервалу  $[c_{j,\text{н}}, c_{j,\text{в}}]$  описывается двумя ограничениями: «снизу» и «сверху».

При создании многомерной модели полезности ЛПР задаёт свои предпочтения  $R_j \subseteq Y_j \times \overline{Y_j}$  на шкалах признаков, формируя функции полезности  $u_j \in [0, 1]$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

Для вычисления многокритериальных оценок объектов и значений многомерных функций полезности ЛПР должен задать отношение важности на множестве критериев  $R_{\text{в}} \subseteq P \times P$  или функций полезности  $R_{\text{в}} \subseteq U \times U$ . На основании отношения важности вычисляется вектор важности свойств объектов  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_j, \dots, w_n)$ .

**Модель метода** решения задачи выбора задаётся системным анализом в зависимости от требований, предъявляемых к результату

---

<sup>‡</sup> В классических задачах оптимизации они именуются *ограничениями*.

выбора: степени упорядочения объектов, выделения одного или оценивания всех объектов, достоверности и времени оценивания.

Для методов оптимизации по величинам критериев выбираются границы шкал  $[y_{j,\min}, y_{j,\max}]$ ,  $j = \overline{1, n}$ , и способы сбора экспертной информации и оценивания (последовательный или параллельный).

**Модель результата** решения задачи выбора. Она определяется решаемой задачей выбора. При выборе единственного объекта (наилучшего или наихудшего) им является объект  $x^* \in X$ .

При оценивании всех объектов многомерным оценкам объектов сопоставляются натуральные числа (рейтинг объектов):  $f_{ord}: U \rightarrow N$ .

При решении задачи многомерной классификации устанавливается принадлежность оцениваемого объекта  $x_i$  одному из заданных классов  $h_k \in H$  по максимальному значению многомерной функции принадлежности:  $h_k^* = \arg(\max_H(\mu_k(x_i)))$ .

### **3. Приращение предпочтений при создании модели выбора.**

Проектирование модели выбора – удел предметника и системного аналитика. Оно начинается с определения частных целей, детализирующих цель, поставленную лицом, принимающим решение. На основе построенного дерева целей определяется начальная совокупность измеряемых показателей  $F$ . Она уточняется на последующих ступенях проектирования.

Проектирование моделей прототипа и экземпляра не требует прямого участия ЛПР. Он должен только согласиться с математическим и логическим обоснованием построенной модели. Участие ЛПР необходимо при задании *начальных предпочтений*. К ним относится формулирование идеальной цели для каждого признака и определении их важности.

Формулирование идеальной цели ограничивается заданием предпочтения одной границы шкалы признака над другой. Например, максимизации  $j$ -го признака соответствует предпочтение  $y_{j,\max} > y_{j,\min}$ . Это предпочтение представляется восходящей монотонной нормирующей функцией, измеряемой в шкале  $[0, 1]$ . Все функции, создаваемые на основании критериев, будем трактовать как функции полезности согласно парадигме работы [2].

Формулирование реальной цели требует большего знания о предметной области, а, следовательно, задания *дополнительных* предпочтений. Реальная цель  $c_j$ , представленная ограничительным критерием, не совпадает с границей шкалы  $[y_{j,\min}, y_{j,\max}]$  за счёт учёта факторов, препятствующих достижению идеальной цели (например, из-за огра-

ниченности ресурса). Она определяется на основе экспертной или статистической информации.

В методе условной оптимизации ограничительные критерии используются для отсева альтернатив. Однако в отличие от множества Парето, которому должна принадлежать лучшая альтернатива, она не обязательно остаётся среди альтернатив, отобранных по ограничениям. Отсеянная по одному из ограничений альтернатива может оказаться лучшей по совокупности всех остальных критериев [3]. Поэтому при переходе от жёстких (безусловных) ограничений к мягким (условным) ограничениям отсеивание альтернатив по ограничителному критерию заменяется на его *нормирование*. Оно не столь однозначно, как нормирование целевого критерия, поскольку осуществляется по участкам шкалы.

Для критерия  $\geq(f_j(x_i), c_j)$  монотонное возрастание полезности реализуется на участке шкалы  $(c_j, y_{j,\max}]$ , а для критерия  $\leq(f_j(x_i), c_j)$  монотонное убывание полезности реализуется на участке шкалы  $[y_{j,\min}, c_j)$ . Величина полезности в точке достижения цели по умолчанию принимается за 0,5 (50%), оставляя возможность увеличивать полезность на участке превышения цели. На участке запрещённых значений существуют 3 варианта задания полезности – нулевая полезность (1), монотонно убывающая положительная полезность (2) и монотонно возрастающая отрицательная полезность (3). На рис. 1 приведены различные варианты нормирующей функции для критерия  $\geq(f_j(x_i), c_j)$ .

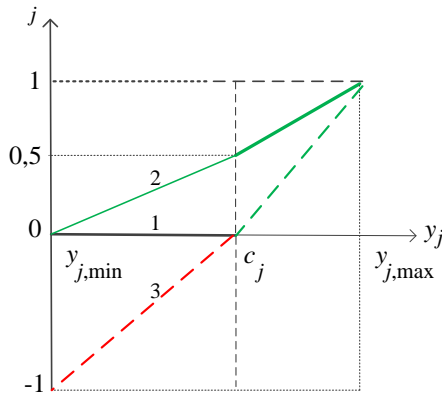


Рис.1. Варианты нормирующей функции для критерия  $\geq(f_j(x_i), c_j)$

Дополнительные предпочтения задаются также при создании функции частичного достижения цели на основе критериев соответствия – точечного и интервального [4]. В реальных условиях точное достижение целевого значения  $c_j$  осуществимо в редких случаях. Поэтому даётся процент разброса от «попадания в цель», по которому вычисляются допустимые отклонения от цели  $\pm\Delta c_j$ . В целевой точке  $c_j$  значение функции максимально. В абсолютной шкале оно равно единице:  $u(c_j)=1$  и может трактоваться как максимальная полезность признака. По мере отклонения от цели в обе стороны функция полезности монотонно убывает, имея ненулевые значения в диапазоне  $c_j \pm \Delta c_j$ . Если закон убывания полезности неизвестен, то он принимается линейным.

Аналогичным образом строится функция полезности на основе интервального критерия соответствия, только отклонения задаются не от целевого значения  $c_j$ , а от нижней и верхней границ интервала  $[c_{jн}, c_{jв}]$ . На рис. 2а и б приведены функции отклонения от цели, трактуемые как функции полезности для точечного и интервального критериев соответствия.

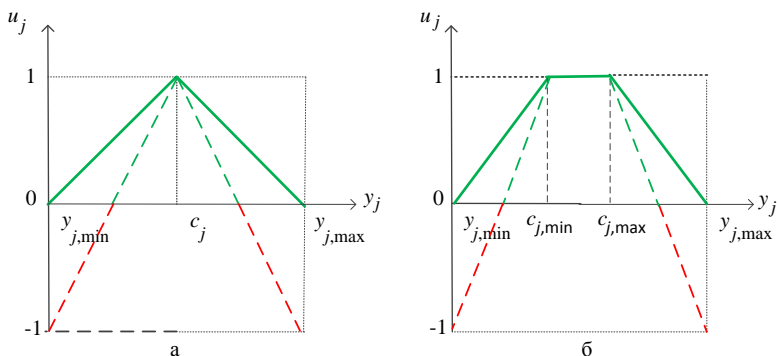


Рис.2. Варианты функции отклонения от цели

Пунктирными линиями на рис. 2а и б показана возможность представления отрицательной полезности при удалении от точечной или интервальной цели.

В задачах классификации положительные функции, изображённые на рис. 2, называются функциями принадлежности классу. Под классом понимается носитель функции, т.е. её область определения на шкале признака, а сама функция отражает меру принадлежности классу. В том случае, когда число классов  $k > 1$ , а сами классы упорядочены

по качеству, фронты треугольной и трапецидальной функций отражают расплывчатость границ между смежными классами, свойственную субъективным оценкам качества.

В работе [5] был предложен метод создания кусочно-гладких функций полезности, основанный на использовании нормирующих функций ограничительных критериев, в развитие метода создания по точкам кусочно-линейных функций полезности [6]. Несмотря на ограниченное число промежуточных точек на шкале признака (не менее пяти), эти методы требуют большого количества экспертных оценок при наличии многих признаков.

Для уменьшения трудоёмкости в основу создания функций полезности был положен подход, аналогичный использованию стандартных функций плотности распределения вероятности в математической статистике. На основе идеологии риска на разных участках шкалы признака был предложен набор типовых функций полезности [7]. ЛПР выбирает ту из них, которая в наибольшей степени соответствует его предпочтениям. Форма функции уточняется экспериментально путём изменения её параметров.

**4. Методология выбора на основе увеличения объёма предпочтений.** Простейшим методом выбора является выделение недоминируемых объектов на основе отношения Парето-доминирования:

$$R_{\Pi} \subseteq P_1 \times \dots \times P_j \times \dots \times P_n.$$

Но множество Парето, как правило, не бывает единичным. А поэтому необходимо применение дополнительных предпочтений, которые позволяют применить методы, обеспечивающие линейный порядок отобранных альтернатив. В соответствии с этим процедура наращивания предпочтений выполняется в несколько этапов.

**Этап 1.** Находится отношение Парето-доминирования на конечном множестве объектов (альтернатив) с выделением *множества недоминируемых объектов* (Парето)  $X_{\Pi}$ . Другим способом отбора кандидатов на лучший вариант является отбор объектов  $X_{sel}$  по ограничительным критериям. Для получения линейного порядка на множестве недоминируемых или селективированных объектов требуется привлечь дополнительные предпочтения ЛПР. Альтернативой трудоёмкому диалогу системного аналитика с экспертом является скаларизация векторных оценок объектов.

**Этап 2.** Для получения средневзвешенных многокритериальных оценок объектов ЛПР задаёт *важность критериев*. Системный аналитик устанавливает границы шкал признаков и выбирает вид синтезирующей функции. Для приведения разнородных критериев к единой

шкале  $[0, 1]$  их значения нормализуются. С учётом предпочтения одной границы шкалы над другой нормирующие функции являются монотонными и линейными.

**Этап 3.** *Идеальная* цель и соответствующая ей линейная монотонная нормирующая функция отражает полную независимость рассматриваемого критерия от других факторов. В отличие от неё *реальная* цель формулируется с учётом некоторого внешнего фактора, например, наличия ресурсов для достижения цели. Поэтому она задаётся в форме ограничительного критерия превосходства ( $\geq, \leq$ ) или соответствия ( $=, \in$ ) по отношению к некоторому значению  $j$ -го признака,  $y_{j,\min} < c_j < y_{j,\max}$ . Заметим, что выбор значения  $c_j$ , связанный с учётом дополнительных факторов, соответствует более углублённому анализу предметной области. Знание реальных целей позволяет ЛПР воспользоваться более изощрённым методом оптимизации, к которому относится метод выбора по отклонениям от цели (метод мягких притязаний) [2]. При использовании этого метода объект, не реализующий некоторую частную цель, не отсеивается, а штрафуются пропорционально мере невыполнения цели, а объект, перевыполнивший частную цель, поощряется пропорционально мере превышения цели. Лучший объект может выбираться по минимальной сумме штрафов или по максимальному превышению частных целей, либо на основании их алгебраической суммы.

Алгебраическая сумма штрафов и поощрений применяется в том случае, когда допускается *невыполнение* некоторых частных целей. Объекты, имеющие нулевой суммарный штраф, удовлетворяют всем частным целям, но требуется дополнительная информация для того, чтобы выделить из них наилучший объект. С этой целью можно привлечь понятие полезности признаков.

**Этап 4.** В качестве простейшего варианта функции полезности принимается *нормирующая функция* ограничительного критерия. В отличие от нормирующей функции целевого критерия её создание неоднозначно из-за промежуточного положения целевого значения  $c_j$  на шкале критерия.

Модель выбора с функциями полезности, построенными на основе ограничительных критериев, более информативна, чем модель с линейными нормирующими функциями, построенными на основе целевых критериев. Она может применяться в многомерной теории полезности (Multiattribute utility theory). Наличие дополнительного числа промежуточных точек на шкалах признаков повышает информативность модели.



**Этап 5. Построение функций полезности по точкам.** Выбирается один из описанных выше методов создания функций полезности по точкам. Для синтеза многомерной функции полезности используются синтезирующие (обобщающие функции), применяемые в многокритериальной оптимизации. Недостатком этого метода является трудоёмкость сбора экспертной информации для определения полезности в промежуточных точках.

**Этап 6.** Обучение модели выбора на *типовых функциях полезности*. ЛПР подбирает функцию полезности, в наибольшей степени соответствующую его предпочтениям на различных участках шкалы признака. По причине бесконечного множества предпочтений она более информативна, чем функция, построенная по точкам. Принятая по форме функция уточняется под предпочтения ЛПР путём изменения значений её параметров и пробных расчётов рейтинга объектов.

### **Заключение**

Для принятия управленческих решений разработаны разнообразные модели и методы выбора, различающиеся способами сбора и обработки предпочтений. Трудоёмкость и стоимость реализации методов в значительной степени зависит от объёма используемых в них экспертных оценок, что связано с применением ручного квалифицированного труда.

На практике методы выбора применяются изолированно друг от друга. Между тем, между моделями выбора существуют очевидные связи по объёму включённых в них предпочтений. Это позволяет применять их в определённой последовательности, от более простых к более сложным моделям, в зависимости от имеющихся у ЛПР ресурсов. Такая последовательность предложена в настоящей работе на основе системного анализа моделей выбора, использующих в качестве модели-прототипа модель «Объекты/Признаки».

Очевидно, что достоверность результата выбора определяется объёмом предпочтений, привлечённых к созданию модели. Чем больше этот объём, тем выше качество полученного результата. Однако увеличение объёма предпочтений влечёт увеличение трудоёмкости метода выбора. Для разрешения этого противоречия прямые экспертные оценки частично замещаются применением типовых обобщающих функций и функций полезности и их настройкой на решаемую задачу.

В качестве инструментального средства для реализации предложенной методологии использовалась система выбора и ранжирования СВИРЬ-П [<http://www.mcd-svir.ru>], реализующая все рассмотренные методы выбора.

## Литература

1. *Ларичев О.И.* Вербальный анализ решений. –М.: Наука, 2006.181 с.
2. *Микони С.В.* Многокритериальный выбор на конечном множестве альтернатив. СПб.: Лань, 2009. 272 с.
3. *Микони С.В.* Оценивание альтернатив по полезности как завершающий этап их многокритериальной оптимизации // Труды СПИИРАН, 2013, выпуск 31. С. 6–19.
4. *Микони С.В.* Мягкая условная оптимизация на дискретном множестве объектов // Вестник Томского Политехнического университета, 2011, N3. С. 39–44.
5. *Микони С.В. Бураков Д.П.* Функции частичного достижения цели // Труды Конгресса IS&IT'13, Дивноморское, 2-9.09. 2013, –М: Физматлит, 2013, Том 1. С. 30-38.
6. *Кини Р.Л., Райфа Х.* Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. –М.: Радио и связь, 1981. 559 с.
7. *Микони С.В.* Типовые функции полезности в многопризнаковом оценивании альтернатив // Сборник научных трудов международной научной конференции ISDMCI'2013, –Херсон: ХНТУ, 2013. С. 366-371.

S.V. Mikoni

### **Solving problems of selection based on the resources of Decision Maker**

---

**Abstract.** The preferences of Decision Maker are an important component of the model of choice. Inconsistency indicates increased preference improves the accuracy of the estimation, and simultaneously increases the complexity of creating a model. It is proposed to strengthen the role of a systems analyst in creating the model. Methodology, based on system analysis of models and methods of choice, reduces the complexity of creating a model of choice.

**Keywords:** selection model, the DM preferences, the ideal and the real target, target and constraint criterion, gauge function, the utility function.

---

Mikoni Stanislav – Dr. of Sc., Fool Professor, [svm@sm4265.spb.edu](mailto:svm@sm4265.spb.edu); Professor of Mathematics and Modeling Department of St. Petersburg State Transport University

**Труды VI Всероссийской конференции «Нечёткие системы и мягкие вычисления», 27-29.06.2014, СПб.: Политехника-Сервис, 2014. Том 2, стр. 8-17.**