

Микони С.В.

Россия, Санкт-Петербург, Петербургский государственный университет путей сообщения
**СИСТЕМАТИЗАЦИЯ МЕТОДОВ МНОГОПРИЗНАКОВОГО ОЦЕНИВАНИЯ
НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА ПОЛЕЗНОСТИ¹**

Введение

«Каждый кулик своё болото хвалит» – эта пословица вполне применима к приверженцам какого-либо подхода или метода в науке, если они претендуют на его всеобщность. Такое впечатление складывается, когда авторы нестрого ограничивают сферу эффективного применения своего метода, либо необоснованно отвергают другие подходы. Например, трудно принять точку зрения, отдающую предпочтение качественным значениям признака перед его количественными значениями и экспертных оценок над статистическими данными на том основании, что при количественных подходах критерии «сворачиваются в один или несколько числовых обобщенных показателей (индексов) эффективности по некоторой формуле без каких-либо обоснований или объяснений» [1]. По нашему мнению, количественные оценки более информативны, чем качественные, и более точны, чем мнения экспертов. Что касается обобщения показателей, в литературе приводятся обоснования соответствующих формул [2] и рекомендации по их применению [3]. Применение экспертных оценок неизбежно в отсутствие количественных оценок признаков, но заменять вторые оценки первыми – означает уменьшать информативность показателей, что противоречит постулатам измерения. Что касается такого аргумента, как слабая структурируемость информации, он применим как к качественной, так и к количественной информации, поскольку структурирует информацию человек с присущей ему субъективностью взглядов.

В англоязычных работах в качестве первой ступени поиска наилучшего варианта на конечном множестве альтернатив, как правило, используется доминантный анализ множества альтернатив (*dominant analysis*), предназначенный для выделения множества Парето. Поскольку теоретически доказано, что наилучший вариант принадлежит множеству Парето, остальные варианты исключаются из рассмотрения. Наилучший вариант среди оставшихся находится путём скаляризации векторных оценок (*multiobjective optimization methods*). Поиск наилучшего варианта методами многоатрибутной теории полезности (*multiattribute utility theory methods*) никак не связан с предыдущим подходом. Эта совокупность частных подходов к принятию решений лишена общей парадигмы, а, следовательно, и системности.

Между тем, принятие решений не ограничивается поиском наилучших вариантов. Очень часто приходится искать «узкое звено», как антипод наилучшего варианта, устранение которого позволяет решить проблему. Узким звеном может оказаться отстающий участок в технологической цепочке производства, подразделение, ухудшающее результаты работы всей организации, работник, недобросовестно исполняющий свои обязанности и т.п. В ряде случаев необходимым является выявление средних по свойствам вариантов. Например, в качестве цели может быть выдвинуто нахождение среднего («типичного») подразделения или сотрудника.

Наличие различных задач и многочисленных методов их решения затрудняет пользователю разобраться в том, какой же подход для него наиболее приемлем. Решению этой проблемы должна способствовать систематизация методов многопризнакового оценивания объектов, что и представляет собой цель настоящей работы.

1. Постановка задачи

В основе систематизации любых объектов лежит их *сходство*, а разновидности порождаются применением частных *различий*. В качестве задачи, пригодной для применения различных методов многопризнакового оценивания объектов, примем задачу *упорядочения* (ранжирования) вариантов принятия решения, а в качестве принципа, объединяющего эти методы, примем принцип *полезности*. Упорядочение объектов применимо к поиску любого объекта – наилучшего, наихудшего, либо среднего. Поскольку все методы выбора основаны на предпочтениях, итогом их применения может являться установление отношения порядка на множестве объектов. Следовательно, решение задачи упорядочения позволяет сопоставить любые методы выбора.

Понятие *полезности* было введено фон Нейманом и Моргенштерном [2]. В настоящее время в англоязычной литературе не делается различий между функциями полезности и функциями *ценности*. Действительно, трудно предположить, чтобы понятия ценности и полезности противоречили друг другу. Функции ценности и полезности измеряются в одной шкале [0, 1]. Различие в названиях функций было обусловлено исходными позициями предложивших их авторов. Функции ценности строились в предположении неравноценности для ЛПР делений шкалы показателя [4], а для получения функций полезности был предложен метод лотерей (предпочтений, связанных с

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00439)

азартом). Естественно, что ценность делений полученной с помощью лотерей функции также различна.

Понятие полезности распространяется на альтернативу при обобщении функций полезности её показателей (атрибутов). Альтернатива A полезнее альтернативы B , если обобщённая оценка её полезности больше, чем у альтернативы B . Это позволяет упорядочивать альтернативы по величине функции полезности. Правомерна и обратная задача – определения величины полезности альтернатив на основе отношения предпочтения.

Поскольку величина полезности применяется для упорядочения альтернатив в рамках одного метода, для сопоставления методов между собой будем использовать сложность функции полезности. Она зависит как от информативности шкалы, в которой измерена функция, так и вида самой функции. Вид функции тем сложнее, чем разнообразнее предпочтения, которые она отражает.

2. Измерение полезности

Для измерения *полезности*, как нормированной величины, будем использовать шкалу $[-1, +1]$. Положительному отрезку шкалы $[0, 1]$ сопоставляется мера *полезности* свойства или самого объекта (до 100% от ожидаемой). Отрицательному отрезку шкалы $[-1, 0]$ сопоставляется мера *вредности* свойства или самого объекта (до 100% от ожидаемой). В экономическом смысле под вредностью понимаются убытки субъекта. В более широком смысле вред – это всё то, что угрожает существованию субъекта. Значению $u_j(x)=0$ соответствует *бесполезность* j -го свойства с точки зрения ожидаемой полезности (полезно на 0%).

Положительный и отрицательный отрезки шкалы обладают всеми свойствами абсолютной шкалы. Над измеренными в ней числами допускаются любые арифметические операции. В частных случаях полезность измеряется в менее информативных шкалах. Рассмотрим их на примере положительного отрезка шкалы.

Наиболее примитивной является бинарная шкала $\{0, 1\}$. В ней измеряется либо полезность ($u(x)=1$), либо бесполезность ($u(x)=0$) объекта x . При переходе от бинарной шкалы к абсолютной игнорируются все промежуточные значения шкалы $[0, 1]$. Иными словами, используются только граничные значения этой шкалы.

Полезность $u(x)$ объекта x , измеренного в порядковой шкале, может быть вычислена через присвоенный ему ранг $\rho(x)$, по следующей формуле:

$$u(x) = (\rho_{\max} - \rho(x)) / (\rho_{\max} - 1), \quad (1)$$

где ρ_{\max} – максимальный (наихудший) ранг объекта.

При переходе от порядковой шкалы к абсолютной интервалы между соседними промежуточными значениями шкалы $[0, 1]$ полагаются *одинаковыми* и определяются величиной ρ_{\max} .

Агрегирование показателей, измеренных в *разных* шкалах, предваряется их нормализацией относительно границ шкалы. С точки зрения полезности нормализующая функция растущего показателя интерпретируется полезностью $u_{\max}(y_j)$:

$$u_{\max}(y_j) = \frac{y_j - y_{j,\min}}{y_{j,\max} - y_{j,\min}}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2)$$

а нормализующая функция убывающего показателя интерпретируется полезностью $u_{\min}(y_j)$:

$$u_{\min}(y_j) = \frac{y_{j,\max} - y_j}{y_{j,\max} - y_{j,\min}}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Обе функции $u_{\max}(y_j)$ и $u_{\min}(y_j)$ непрерывны и линейны.

Наиболее простые функции полезности, отражающие убывание и возрастание предпочтений на шкале показателя, получаются возведением формул (2) и (3) в степень k . Отрицательная степень k характеризует несклонность ЛПР к риску, а положительная степень – склонность к риску. В зависимости от величины k несклонность к риску описывается семейством кривых, выпуклых вверх (рис. 1а), а склонность к риску – семейством кривых, выпуклых вниз (рис. 1б).

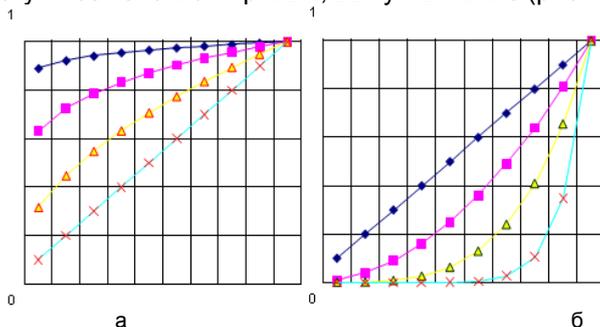


Рис. 1. Монотонные функции полезности с несклонностью и склонностью к риску

Более сложные функции полезности совмещают склонность к риску на начальном отрезке шкалы показателя и несклонность к риску после определённого порога c_j (рис. 2).

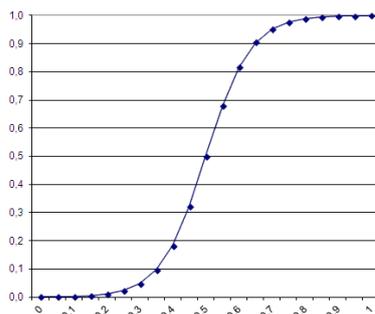


Рис.2. Логистическая функция полезности

3. Оценка полезности альтернатив различными методами принятия решений

В теории принятия решений сформировались следующие группы методов многопризнакового оценивания:

- Оптимизационные методы:
 - Векторная оптимизация (доминантный анализ);
 - Скалярная оптимизация (скаляризация векторных оценок);
 - Оптимизация по отклонениям от цели.
- Оптимизация по функциям полезности показателей.
- Вербальный анализ решений.
- Отбор и классификация.
- Вычисление приоритетов на основе матриц парных сравнений.

Наиболее простую оценку полезности даёт отбор допустимых или недоминируемых альтернатив. Альтернативы, вошедшие в допустимое множество или множество Парето, можно трактовать как *полезные*, а не вошедшие в них – как бесполезные. Здесь промежуточная мера полезности между нулём и единицей отсутствует.

Методы отбора с позиции полезности относятся к *жестким* методам выбора. Между тем, в [5] были сформулированы условия, при которых многокритериальная функция полезности объекта-кандидата на отсеивание может оказаться предпочтительнее соответствующих функций сопоставляемых с ним объектов. То же относится и к недоминируемым альтернативам. Скалярная оценка некоторых из них может оказаться выше, чем у части альтернатив, вошедших в множество Парето.

Если учитывать все альтернативы Парето-упорядоченного множества, то меру их полезности можно рассчитать по формуле (1), исходя из занимаемого ими уровня в ранжированном графе доминирования. Таким образом, формула (1) представляет *линейную дискретную* функцию полезности, определённую на уровнях ранжированного графа. По причине рассмотрения *всех* альтернатив без их отсеивания методы упорядочения, в отличие от методов отбора (селекции), следует отнести к *мягким* методам выбора. К ним относятся доминантный и вербальный анализ, измеряющие альтернативы в порядковой шкале.

Возможность измерять полезность альтернатив в интервальной шкале предоставляют методы скаляризации векторных оценок альтернатив. Поскольку агрегирование разнородных показателей требует нормализации их значений, используемые для этой цели формулы (2) и (3), преобразуют эти значения из интервальной шкалы в абсолютную шкалу. Это позволяет вычислять полезность показателя в любой точке его шкалы, причём зависимость полезности от значений *целевого* критерия выражается *линейной непрерывной* функцией.

В отличие от целевого критерия результатом нормализации *ограничительного* критерия является *кусочно-линейная* функция полезности, вычисляемая на отрезках шкалы показателя $[y_{j,\min}, c_j]$ и $(c_j, y_{j,\max}]$. ЛПР устанавливает характер линейной зависимости на этих участках шкалы и задаёт значение полезности в точке c_j : $u(c_j)$. Таким образом, функция полезности, созданная на основе ограничительного критерия более информативна, чем созданная на основе целевого критерия. Это относится как к скаляризации абсолютных величин показателей, так и их отклонений от заданной цели c_j , $j = \overline{1, n}$.

Принципиальное отличие многоатрибутной оптимизации по функциям полезности показателей от многокритериальной оптимизации заключается в необходимости создания нелинейных функций полезности. При многокритериальной оптимизации линейные функции полезности вычисляются автоматически. Большая сложность нелинейных функций и определяет большую информативность моделей, создаваемых в рамках теории полезности.

В [6] показано, что функция полезности показателя может быть не только создана ЛПР, но и вычислена по функциям принадлежности нечётким классам. Это свойство связывает оптимизацию по функциям полезности показателей с нечёткой классификацией. Разумеется, создание функции полезности на основе функций принадлежности классам более трудоёмкий процесс, чем её создание напрямую. Но при этом решаются сразу 2 задачи: классификации и упорядочения объектов.

Приоритеты объектов, вычисляемые на основе матрицы парных сравнений, нетрудно выразить в терминах полезности путём их нормализации относительно максимального значения:

$$u(x_i) = w_i / w_{i, \max}.$$

Ценой создания *дискретной* функции полезности, определённой на множестве объектов, является формирование матрицы парных сравнений (МПС) и вычисление на основе её содержимого приоритетов объектов [7].

4. Систематизация методов многопризнакового оценивания по полезности

На основе анализа информации о полезности, выполненного в предыдущем разделе, упорядочим методы многопризнакового оценивания альтернатив. Упорядочение методов в направлении усложнения функций полезности приведено в таблице 1.

Таблица 1

Упорядочение методов по сложности функций полезности

NN п/п	Группа методов	Метод	Функция полезности
1	Отбор	по ограничениям	двоичная
		недоминируемых альтернатив	
2	Упорядочение в порядковой шкале	доминантный анализ	линейная дискретная
		вербальный анализ	
3	Скалярная оптимизация	по целевым критериям	линейная непрерывная
4	Скалярная оптимизация по ограничительным критериям	величин показателей	кусочно-линейная
		отклонений от цели	
5	Оптимизация по функциям полезности	прямое создание ФП	нелинейная дискретная
		по МПС	
		по функциям принадлежности	
		типовые ФП	нелинейная непрерывная

Заключение

Упорядочение методов многопризнакового оценивания альтернатив по сложности функций полезности позволяет оценить свойства этих методов. Чем в большей степени функции показателей отражают реальную полезность их значений, тем более точна оценка альтернатив. При этом следует помнить, что на точность оценок влияют и такие факторы как правильное назначение важности показателей и выбор обобщающих функций. Но это относится к качеству любой экспертизы и является предметом отдельного исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петровский А.Б., Ройзензон Г.В., Балышев А.В., Тихонов И.П., Яковлев Э.Н. Многокритериальный анализ деятельности научных организаций // Труды XIII конференции по искусственному интеллекту КИИ-2012, г. Белгород, 16-20 октября 2012 г.
2. Нейман Д., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. –М.: Наука, 1970.
3. Микони С.В. Многокритериальный выбор на конечном множестве альтернатив. Учебное пособие. – СПб.: Лань, 2009, 272 с.
4. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. – М.: Радио и связь, 1981. – 559.
5. Микони С.В. Мягкая условная оптимизация на дискретном множестве объектов // Вестник Томского гос. университета, 2011, №3, с.39-44.
6. Микони С.В., Гарина М.И. Условие одинакового упорядочения объектов по функциям полезности и принадлежности // Труды Конгресса IS&IT'11, Дивноморское, 3-10.09. 2011, –М: Физматлит, 2011, Том 1, с.33-37.
7. Микони С.В. Построение функций полезности на основе матриц парных сравнений // Сборник научных трудов международной научной конференции ISDMCI'2012, –Херсон: ХНТУ, 2012, стр. 278-282.

Труды XIII-й СПб. конференции «Региональная информатика-2012», 24-26.10.2012, –СПб.: СПОИСУ, 2013, с. 235-239.