

**ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ СИСТЕМАТИЗАЦИИ МЕТОДОВ
МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ВЫБОРА НА КОНЕЧНОМ МНОЖЕСТВЕ АЛЬТЕРНАТИВ¹**

Микони Станислав Витальевич
Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН
Россия, Санкт-Петербург, 14-я линия В.О., д. 39,
e-mail:smikoni@mail.ru

Аннотация: Сформулированы аксиомы, позволившие установить сходство и различие известных методов многокритериального выбора на конечном множестве альтернатив. Показаны связи между методами, объединившие их в систему. Изложенная теория положена в основу учебника «Теория принятия управленческих решений».

Ключевые слова: аксиома; шкала; целевое значение признака; критерий оптимизации; функция полезности

**THEORETICAL JUSTIFICATION OF SYSTEMATIZATION OF METHODS MULTICRITERIA
OPTIMIZATION ON A FINITE SET OF ALTERNATIVES¹**

Stanislav Mikoni
St. Petersburg Institute for Informatics and Automation
of the Russian Academy of Sciences
SPIIRAS, 39, 14-th Line V.O., St. Petersburg, Russia,
e-mail: smikoni@mail.ru

Abstract: Formulated axioms, which allowed to establish similarities and differences between the known methods of multi-criteria selection on a finite set of alternatives. Showing links uniting methods in the system. The theory is the basis of the textbook "The theory of management decision-making".

Keywords: axiom; scale; target feature; criterion; utility function

Введение. В современной истории можно выделить три этапа изучения моделей и методов принятия решений.

На первом этапе решались, в основном, оптимизационные задачи преимущественно на континуальном множестве альтернатив. Эта область принятия решений получила развитие в связи с необходимостью получения экономического эффекта в промышленных и транспортных технологиях и военного эффекта в боевых операциях. Массовый характер и тех и других стимулировал интерес промышленников и военных к решению этой проблемы, а учёных – к поиску методов решения оптимизационных задач. В рамках научного направления «Исследование операций» были разработаны модели математического программирования и теории игр и реализующие их оптимизационные пакеты программ.

Второй этап связан с бурным развитием вычислительной техники во второй половине XX века. Развитие теории принятия решений стимулировала разработка информационно-советующих систем, входивших в состав автоматизированных систем управления (АСУ). При решении проблемы человеко-машинного взаимодействия большое внимание было уделено роли человеческого фактора, что стимулировало развитие экспертных методов. Возросшая доля человеческого фактора в моделях и методах принятия решений способствовала их выделению из дисциплины исследования операций и объединению в качестве теории принятия решений с научным направлением «Искусственный интеллект». Разработанные в его рамках методы воплощались в экспертные системы оценивания, информационно-советующие и экспертные системы.

Третий этап связан с развитием информационного общества в конце XX века, в котором информатика проникла во все сферы человеческого бытия. Это способствовало автоматизации решений на всех уровнях управления в рамках разработки СППР (систем поддержки принятия решений). В исследованиях стало уделяться большое внимание формализации различных видов неопределённости, присутствующей как в исходных данных, так и в предпочтениях лица, принимающего решение (ЛПР).

Современные учебные пособия по теории принятия решений можно разделить на три категории. Первая из них [1], [2] охватывает модели и методы выбора, разработанные на всех этапах развития теории принятия решений. Специализированные пособия ориентированы либо на метод [3], либо на экономику, либо на то и другое [4]. К третьей категории отнесём учебные пособия по методам принятия управленческих решений [5].

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00439)

Каждой из этих категорий учебников присущи свои недостатки. Первая категория в силу разноплановости методов не рассчитана на практическое применение в управленческих задачах. Учебные пособия второй группы рассчитаны на усвоение ограниченного количества методов. Учебные пособия по методам принятия управленческих решений ориентированы на широкий класс задач предпринимательской деятельности, понимаемой как менеджмент.

Между тем, не все управленцы являются предпринимателями, а круг решаемых ими задач не ограничивается получением прибыли. В любой сфере деятельности (производственной, образовательной, научной, культурной, социальной и пр.) лицо, принимающее решение (ЛПР), решает такие задачи, как:

- 1) определение варианта организационной структуры;
- 2) подбор работников;
- 3) распределение задач между отдельными подразделениями или работниками;
- 4) установление взаимодействия между подразделениями или работниками;
- 5) определение порядка и времени проведения работ.

Функция руководства организацией предусматривает решение таких задач как:

- 1) текущий контроль деятельности сотрудников;
- 2) распределение вознаграждения по результатам работы;
- 3) поощрение лучших работников.

Контроль деятельности организации осуществляется по итогам её функционирования за конкретный период (месяц, квартал, год, пятилетку):

- 1) определение лучших подразделений или работников;
- 2) определение узких звеньев.

Все перечисленные задачи являются, как правило, многокритериальными, а область их определения не превышает нескольких десятков альтернатив. Главным отличием этих задач от задач, решаемых методами исследования операций, является необходимость непосредственного участия ЛПР в проектировании модели выбора. Предпочтения ЛПР должны быть учтены как при формулировании частных целей в процессе построения дерева целей, так и при задании их важности. Именно объём участия ЛПР в проектировании модели выбора резонно принять за признак, выделяющий организационные управленческие решения от других задач принятия решений в сфере управления. Но для создания теории принятия управленческих решений этого недостаточно. Необходимо подвести общую теоретическую базу под все методы многокритериального выбора, применяемые для формализации управленческих операций. Решению этой задачи посвящена данная работа.

1. Методы многокритериального выбора

Методы многокритериальной оптимизации и классификации рассчитаны на упорядочение объектов (альтернатив, вариантов) по многим признакам или отнесение их к упорядоченным по качеству классам. Методы оптимизации делятся на следующие группы:

1. векторная оптимизация (Dominance analysis)
2. скалярная оптимизация (Multiobjective optimization)
3. многоатрибутная оптимизация по полезности (Utility-based multiattribute optimization)
4. вычисление приоритетов на основе парных сравнений (Pairwise prioritization)

Методы классификации (Multicriteria classification) используют либо нечёткие классы, либо группируются по близости многокритериальных оценок.

Каждая группа включает несколько методов. К методам векторной оптимизации относятся:

- 1) упорядочение на основе отношения Парето-доминирования
- 2) лексиминная оптимизация [6]
- 3) лексикографическая оптимизация
- 4) оптимизация на основе единой шкалы изменения качества (ЕШИК) [7]

К методам скалярной оптимизации относятся:

- 1) оптимизация по достижению цели
- 2) условная оптимизация
- 3) оптимизация по отклонениям от цели
- 4) оптимизация по индивидуальным целям.

Каждый метод имеет свои разновидности. Например, методы скалярной оптимизации могут различаться обобщающими функциями, а методы теории полезности различаются способом создания функций (лотерей, оценкой ценности и т.п.).

В соответствии со своими именами все перечисленные методы решают задачу оптимизации. Это относится и к задачам классификации с упорядоченными по качеству классами. Объект, отнесённый к классу «Высокое качество» (ВК), безусловно, *лучше* по качеству объекта, отнесённого к классу «Среднее качество» (СК). Применительно к задачам многокритериальной оптимизации на конечном множестве альтернатив следует использовать именно термин «лучший», а не «оптимальный», как в классических задачах оптимизации. Это объясняется отсутствием строгого

доказательства оптимального решения в условиях неопределённости предпочтений ЛПР и эвристической природы способов их обработки.

Перечисленные методы многокритериального выбора разрабатывались, как правило, изолированно друг от друга, и каждый из них имеет свою аксиоматику. Сведение их в систему требует создания общей аксиоматики. Рассмотрим понятия, участвующие в аксиоматизации.

2. Основные понятия многокритериального выбора

К основным понятиям, применяемым при решении задачи многокритериального выбора и представленным на рисунке 1, относятся: *признак* f_j объекта x_i , *полезность* j -го признака $u(y_j)$, *шкалы* признака и полезности, *целевое* значение признака (цель оптимизации), *идеальная* и *реальная* цели, *предпочтения* на шкалах, *критерий* оптимизации, *функция* полезности. Все понятия объединены относительно графика функции полезности, кусочно-линейной или нелинейной.

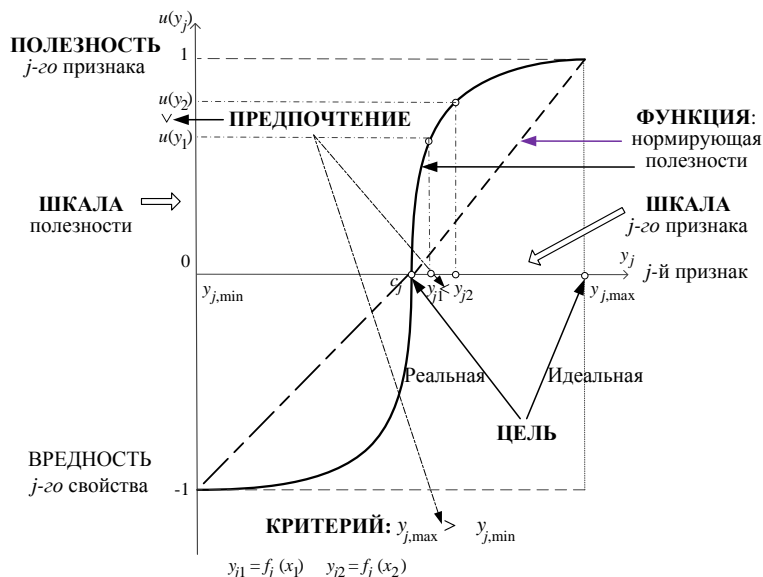


Рис.1. Основные понятия многокритериального выбора

Признак f_j отражает j -е свойство оцениваемого объекта x_i . Объект x_i может оцениваться как в шкале признака $[y_{j,min}, y_{j,max}]$, так и в шкале полезности/вредности $[-1, +1]$. Полуось $[-1, 0]$ «Вредность» используется для отражения потерь ЛПР. Если в задаче выбора потери отсутствуют, то используется только полуось полезности $[0, +1]$.

Под идеальной понимается цель (целевое значение признака) c_j , совпадающая с одной из границ шкалы $[y_{j,min}, y_{j,max}]$: $c_j = y_{j,max}$ или $c_j = y_{j,min}$. Под реальной понимается цель c_j , не совпадающая с границей шкалы: $y_{j,min} < c_j < y_{j,max}$.

Двухместное отношение предпочтения описывается предикатом превосходства $\succ (f_j(x_i), f_j(x_k))$ с $f_j(x_k)$ в роли базы сравнения. Здесь $u = f_j(x_i)$, $u_k = f_j(x_k)$ – значения признака для объектов x_i и x_k . Предпочтение $\succ (y_{j,min}, c_j)$ называется критерием оптимизации на шкале j -го признака, целевым – при $c_j = y_{j,min}$ ($c_j = y_{j,max}$) и ограничительным – при $y_{j,min} < c_j < y_{j,max}$.

Предикат предпочтения $Pr_{\geq}(f_j(x), c_j)$ делится на предикаты:

- превосходства $Pr_{>}(f_j(x), c_j)$, $Pr_{<}(f_j(x), c_j)$;
- соответствия $Pr_{=}(f_j(x), c_j)$, $Pr_{\Pi}(f_j(x), c_{j,n}, c_{j,b})$.

Под функцией полезности понимается отображение $u: Y \rightarrow [0, 1]$. На рис.1 приведены в качестве примера, линейная и нелинейная функции полезности.

3. Аксиомы методов многокритериального выбора на конечном множестве альтернатив

Очевидным способом формирования аксиом, как основополагающих положений общей теории многокритериального выбора на конечном множестве альтернатив, является исключение особенностей методов, что позволяет группировать их в классы. Исключённые особенности используются в качестве видовых отличий методов, связующих их между собой. Перечислим основополагающие положения, обеспечивающие сходство рассматриваемых методов.

1. Оценивание объекта x по многим критериям выполняется либо в шкалах этих критериев, либо в общей шкале $[0, 1]$ или $[-1, +1]$.
2. Целевое значение c_j j -го признака может быть *любым* в пределах шкалы $[y_{j,min}, y_{j,max}]$: $y_{j,min} \leq c_j \leq y_{j,max}$. Это положение позволяет устранить различие между целевым и ограничительным критерием и использовать их как совместно, так и в качестве видовых отличий.

3. Предикат превосходства и соответствия обобщаются в предикат предпочтения $Pr_{\geq}(f_j(x), c_j)$, который представляется *оценочной функцией* $p_j: Y_j \times C \rightarrow [0, 1]$. Шкала $[0, 1]$ является бесконечнозначным обобщением двоичного предиката $\{0, 1\}$, что позволяет использовать для оценки истинности нечёткую логику.
4. Значение предиката $p_j < 1$ трактуется как *частичное достижение* цели c_j . Частичное достижение цели c_j объектом x не является поводом для его *исключения из оценивания*. Это позволяет включить метод условной оптимизации с отсеиванием альтернатив в группу методов многокритериального выбора, оценивающих, в том числе, альтернативы с частичным достижением целей.
5. Любое отображение $\delta_j: Y_j \rightarrow [0, 1]$ значения $y_j = f_j(x)$ j -го признака в шкалу $[0, 1]$ принимается за *функцию полезности* $u_j: Y_j \rightarrow [0, 1]$ независимо от способа её создания. Это позволяет рассматривать нормирующие функции и функции ценности как частные случаи функции полезности.
6. На основе ограничительных критериев «не менее» и «не более» создаются монотонные функции полезности, а на основе критериев «равно» и «интервал» – немонотонные функции полезности. И те, и другие являются кусочно-линейными при нормировании участков шкалы признака, либо нелинейными – при задании предпочтений на участках шкалы.
7. Отображение разности $f_j(x) - c_j$ в шкалу $[-1, 1]$ принимается за *функцию отклонения от цели* $\gamma_j: \Delta C_j \rightarrow [-1, 1]$. Это позволяет учитывать как невыполнение, так и перевыполнение цели, как в отдельности, так и в совокупности.
8. Обобщением шкалы $[-1, 0, 1]$ является процентная шкала $[0\%, 100\%, 200\%]$. Измерение меры невыполнения и перевыполнения плановых заданий позволяет сопоставлять объекты с разными ресурсами по степени выполнения ими индивидуальных плановых заданий.

4. Систематизация методов на основе общей аксиоматики

Согласно аксиоме 1 все методы делятся на 2 группы. К первой группе относятся методы, не требующие общей шкалы для оценивания объекта x . Они используют шкалы критериев и на этом основании называются методами *критериального* выбора. Использование всех критериев методами этой группы для установления линейного порядка на конечном множестве альтернатив основано на сквозном упорядочении их значений. Лексикографическая оптимизация использует с этой целью приоритет критериев, а методы вербального анализа решений (ВАР) – единую шкалу изменения качества (ЕШИК). Эти методы различаются между собой детальностью предпочтений. В то время как в лексикографической оптимизации предпочтения задаются на множестве критериев, в методах ВАР они задаются на множестве пар значений всех критериев. Очевидно, что такое увеличение трудоёмкости создания модели ВАР окупается большим доверием к результатам выбора.

У двух других методов векторной оптимизации отсутствуют предпочтения на множестве критериев, что позволяет устанавливать этими методами только частичный порядок на множестве объектов. В силу упорядочения векторной оценки каждого объекта по качеству лексикографическая оптимизация обеспечивает большую строгость порядка по сравнению с упорядочением на основе отношения Парето-доминирования. Графическое представление системы методами *критериального* выбора приведено в [8].

Методы второй группы используют *единую* шкалу для вычисления общей оценки объектов по всем признакам. Единая шкала требуется для обобщения частных оценок, измеренных в *разных* шкалах. Как правило, обобщённые оценки вычисляются с применением *усредняющих функций*, которые векторной оценке объекта ставят в соответствие число (скаляр). Для преобразования шкал признаков в единую шкалу используются различные функции. Независимо от вида функций использующие их методы назовём методами *функционального* выбора.

Согласно аксиоме 5 все функции, отображающие значения шкалы признака в единую шкалу $[-1, 0, 1]$ или $[0, 1]$, принимаются за функции *полезности*. Согласно аксиоме 7 функция, отображающая разность $f_j(x) - c_j$ в шкалу $[-1, 1]$ принимается за функцию *отклонения от цели*. Таким образом, в зависимости от отношения к цели методы функционального выбора делятся на две группы – по *достижению* цели и *отклонению* от цели.

Методы достижения цели различаются по способу создания функций полезности – *вычисляемых* и *задаваемых экспертами*. К вычисляемым функциям относятся нормирующие функции критериев и функции приоритетов в матрицах парных сравнений. Более подробно все функции полезности рассмотрены в [9]. Методы многокритериальной оптимизации, использующие линейные нормирующие функции критериев, назовём методами достижения идеальной цели (ДИЦ). Методы многокритериальной оптимизации с ограничениями, использующие кусочно-линейные нормирующие функции с перегибом в точке c_j , $j = \overline{1, n}$, назовём методами достижения реальной цели (ДРЦ). Функции приоритетов используются методом анализа иерархий (МАИ).

Функции, задаваемые экспертами, разделим на две группы – по предпочтениям экспертов и плановым заданиям. К первой группе относятся нелинейные функции, определяемые на основе

лотерей (риска ЛПР) и функции ценности. Их реализует метод многоатрибутной оптимизации по полезности (МОП). Функции, отражающие плановые задания, использует метод оптимизации по индивидуальным целям (ОИЦ).

В группу методов отклонения от цели входят методы условной оптимизации (УО) и оптимизации по отклонению от цели (ООЦ). Первый из них отсеивает объекты, не удовлетворяющие ограничению хотя бы по одному критерию. Методы оптимизации по отклонению от цели оценивают объекты по всем критериям. Невыполнение ограничения как цели оценивается штрафом, а перевыполнение цели – поощрением (бонусом). Это позволяет вычислять три вида обобщённых оценок: только по штрафам, только по поощрениям и по алгебраической сумме штрафов и поощрений.

Графически взаимосвязь методов функционального выбора (МФВ) представлена на рис. 2. Подчёркнуты основания деления методов (системообразующие признаки). Курсивом представлены видовые отличия (значения признаков). В правом столбце помещены основные методы функционального выбора.



Рис.2. Классификация методов функционального выбора

Заключение. Исследователи, предлагающие свои методы решения проблемы, обычно не озабочены встраиванием их в общую систему. Более того, они заинтересованы подчёркивать отличие своего метода от существующих. Между тем, очевидно, что методы, нацеленные на решение общей проблемы, должны иметь сходство. Именно, оно позволяет объединить изначально изолированные сущности в систему. Сходство выявляется путём исключения частных ограничений метода с целью перехода к общим ограничениям, присущим всем методам решения одной проблемы.

Предложенная в работе группа аксиом имеет отношение, в той или иной степени, ко всем методам выбора. Это позволяет рассматривать её в качестве базовой характеристики всех методов выбора. Частные особенности методов рассматриваются в качестве видовых отличий. Обнаруженное через аксиомы сходство и различие методов даёт теоретическое обоснование системы методов, что важно для их изучения и определения сферы эффективного применения. Изложенная теория была положена в основу учебника «Теория принятия управленческих решений» [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноруцкий И.Г. Методы принятия решений. Учебное пособие. -СПб.: БХВ-Петербург, 2005. Петровский А.Б. Теория принятия решений. Университетский учебник. -М.: ИЦ "Академия", 2009. -408 с.
2. Петровский А.Б. Теория принятия решений. Университетский учебник. –М.: ИЦ «Академия», 2009. -391 с.
3. Саати Т.Л. Принятие решений при зависимостях и обратных связях. -М.: Изд-во ЛКИ, 2007. -357 с.
4. Андрейчиков А.В., Андрейчикова О.Н. Анализ, синтез, планирование решений в экономике. - М.: Финансы и статистика, 2004. -464 с.
5. Литвак Б.Г. Управленческие решения. Практикум. - М.: Московская Финансово-Промышленная Академия, 2012. -448 с.
6. Подиновский В.В. Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений. -М.: Физматлит, 2007, 37 с.
7. Ларичев О.И. Вербальный анализ решений. - М.: Наука, 2006. -181 с.
8. Микони С.В. Системный анализ методов многокритериальной оптимизации на конечном множестве альтернатив // Труды СПИИРАН, 2015, выпуск 4(41), Стр. 180–199.
9. Микони С.В. Теория принятия управленческих решений. Учебное пособие. -СПб.: Лань 2015. -448 с.

Сборник трудов СПб. международной конференции «Региональная информатика и информационная безопасность». –СПб.: СПОИСУ. 2015. Вып. 1. С. 48-52.