2010

приложение к журналу
«ОТКРЫТОЕ ОБРАЗОВАНИЕ»
№ 6, 2010

МАТЕРИАЛЫ

XXXVII МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ И ДИСКУССИОННОГО НАУЧНОГО КЛУБА

Информационные технологии в науке, социологии, экономике и бизнесе

ШКОЛА МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ

IT + SE`10

ОСЕННЯЯ СЕССИЯ
Украина, Крым, Ялта–Гурзуф, 1–10 октября 2010 г.

ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ ФУНКЦИЙ ПОЛЕЗНОСТИ НА МАСШТАБИРОВАНИЕ ШКАЛ ПРИЗНАКОВ В ЗАДАЧЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Бураков Д.П. bdsw@yandex.ru

Введение

Одной из задач, решаемых при упорядочении объектов методами многокритериальной оптимизации, является нормализация значений неоднородных признаков. Она выполняется с целью приведения их значений к единой шкале для последующей агрегации (построение свёртки). Поскольку каждое значение j-го признака y_j, j=1,…,n, нормализуется диапазоном [$y_{j,\min}$, $y_{j,\max}$], которому оно принадлежит, результат нормализации измеряется в абсолютной шкале [0, 1]. Именно это позволяет выполнять над нормированными значениями признаков любые арифметические операции, которые используются для получения многокритериальных (обобщенных) оценок объектов.

Диапазоны значений признаков [$y_{j,\min}$, $y_{j,\max}$], применяемые для их нормализации, обычно задаются выборкой упорядочиваемых объектов X=(x_1, …, x_i, …, x_N). С изменением состава объектов могут меняться и диапазоны значений признаков [$y_{j,\min}$, $y_{j,\max}$]. Их новое соотношение может влиять и на соотношение нормированных значений признаков, что, в свою очередь, может повлечь изменение порядка объектов [1]. Этот эффект можно рассматривать как результат сдвига границ признаков.

Другой причиной сдвига границ признаков является стремление увеличить оценки объектов, обладающих наихудшим значением признака. Эта операция применяется для учёта минимальных значений признаков в аддитивной свёртке, либо для исключения нулевых обобщенных оценок объектов при использовании прямых мультипликативных обобщающих функций.

С целью установления устойчивого соотношения между многокритериальными оценками объектов в [1] предлагается итеративно сдвигать границы шкал признаков на одинаковую относительную величину до тех пор, пока не стабилизируется порядок объектов, определяемый по величине многокритериальных оценок. При этом открытым остаётся вопрос о пределах и закономерностях изменений границ признаков. Решению этой задачи и посвящается настоящая работа.

1. Постановка задачи

Согласно многокритериальной теории полезности [2] нормализация значений признака является одним из способов задания функций полезности (ФП) его значений. При этом ФП $u(y)$, задаваемая путём нормализации значений признака y_j, является линейной. В общем случае она является нелинейной и для ряда задач может быть представлена степенной функцией:

$$u(y)=\left(\frac{y-y_{\min}}{y_{\max}-y_{\min}}\right)^k,\ k>0,\ y_{\min}\le y\le y_{\max},\ y_{\min}<y_{\max}\,. \qquad (1)$$

При k>1 $u(y)$ представляет собой выпуклую, а при 0<k<1 – вогнутую монотонную функцию с изменением скорости возрастания полезности u по шкале признака. Найдём минимальный порог изменения границ шкалы признака, при достижении которого перестает изменяться порядок объектов.

2. Определение порога допустимого изменения шкал признаков

Будем рассматривать задачу максимизации признаков. При этом применяется сдвиг левой границы шкалы от $y_{\min}$ к $y'_{\min}$, причём $y'_{\min}<y_{\min}$. Для обеспечения одинакового сдвига границ у всех признаков будем использовать приращение шкалы, рассчитываемое на основе коэффициента масштабирования Δy>0. Тогда новый минимум признака $y'_{\min}$ вычисляется по формуле:

$$y'_{\min}=y_{\min}-(y_{\max}-y_{\min})\cdot\Delta y,\ \Delta y\ge 0\,. \qquad (2)$$

При применении выражения (2) ко всем признакам сохраняется соотношение левых границ их шкал. Определим зависимость $u(y)$ от относительного сдвига левой границы, подставив выражение в формулу (1).

$$u(y,\Delta y)=\left(\frac{y-(y_{\min}-(y_{\max}-y_{\min})\cdot\Delta y)}{y_{\max}-(y_{\min}-(y_{\max}-y_{\min})\cdot\Delta y)}\right)^k=\left(\frac{y-y_{\min}+(y_{\max}-y_{\min})\cdot\Delta y}{(y_{\max}-y_{\min})\cdot(\Delta y+1)}\right)^k. \qquad (3)$$

При подстановке в (3) вместо y значения $y_{\min}$ формула преобразуется к виду:

$$u(y_{\min},\Delta y)=\left(\frac{y_{\min}-y_{\min}+(y_{\max}-y_{\min})\cdot\Delta y}{(y_{\max}-y_{\min})\cdot(\Delta y+1)}\right)^k=\left(\frac{\Delta y}{\Delta y+1}\right)^k. \qquad (4)$$

Формула (4) позволяет вычислить, чему будет равна ФП на начальной границе признака $y_{\min}$.

Утверждение 1. При неограниченном увеличении коэффициента Δy выражение (4) стремится к единице. Это следует из равенства единице предела $\lim\limits_{\Delta y\to\infty}\frac{\Delta y}{\Delta y+1}=1$.

Утверждение 2. Чтобы $u(y_{\min}, \Delta y)$ было равно заданному значению u_0, необходимо сдвинуть границу признака $y_{\min}$ на величину:

$$\Delta y = \frac{\sqrt[k]{u_0}}{1-\sqrt[k]{u_0}}. \qquad (5)$$

Действительно, приравняв (4) заданному значению u_0 и разрешив полученное уравнение относительно Δy, получим выражение (5).

Из формулы (3) следует

Утверждение 3. Для функций полезности (1) с различными показателями степени k, сдвиг начала шкал признаков на одинаковое значение коэффициента Δy приводит к *не одинаковому* изменению полезностей значений этих признаков внутри диапазона $[y_{j,\min}, y_{j,\max}]$.

Во избежание этого следует сдвигать границы признаков на различную величину Δy_j, которая для каждого признака должна вычисляться по формуле (5) таким образом, чтобы начальное значение ФП по каждому признаку u_0 было одинаковым. В частном случае, когда показатели степени у всех ФП одинаковые, может применяться одинаковое для всех признаков значение величины Δy.

На рис. 1 показан пример нахождения величины Δy для ФП с различными показателями степени k так, чтобы $u(y_{\min}, \Delta y)=0.5$.

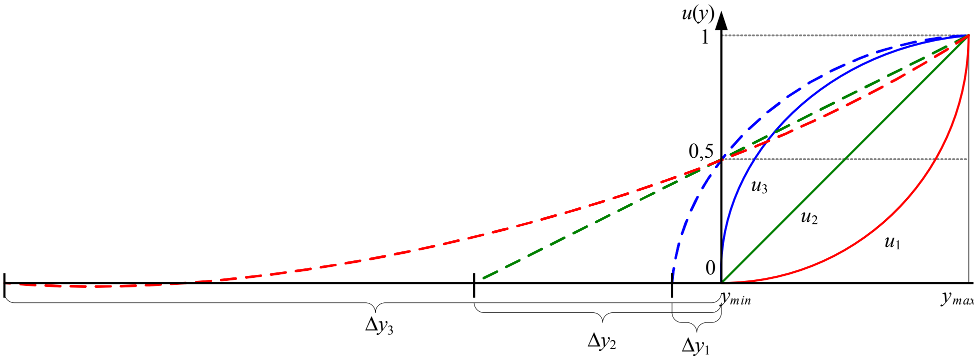

Рис. 1. Обеспечение $u(y_{\min}, \Delta y)=0.5$ сдвигом границы шкалы для ФП при разном k

Из приведенного примера следует, что величина сдвига левой границы шкалы признака для получения значения $u(y_{\min}, \Delta y)=0.5$ тремя разными ФП, определёнными на одинаковом диапазоне $[y_{\min}, y_{\max}]$, различна.

Таким образом исходная задача преобразуется к следующему виду: не на какой одинаковый масштаб Δy расширить признаки, а на какую величину u_0 (одинаковую для всех признаков) увеличить начальную полезность объектов по каждому признаку. Следовательно, формула (4) преобразуется к виду

$$u(y,u_0) = \left(\frac{y - y_{\min} + (y_{\max} - y_{\min}) \cdot \dfrac{\sqrt[k]{u_0}}{1-\sqrt[k]{u_0}}}{(y_{\max} - y_{\min}) \cdot \left(\dfrac{\sqrt[k]{u_0}}{1-\sqrt[k]{u_0}} + 1 \right)} \right)^k. \qquad (6)$$

При $y=y_{\min}$ формула (6) принимает вид $u(y_{\min}, u_0) = \left(\sqrt[k]{u_0}\right)^k = u_0$ (что естественно отражает требование того, чтобы на начале интервала полезность была равна заданной), а при $y=y_{\max}$ выражение $u(y_{\max}, u_0)$ тождественно равно единице (на конце интервала полезность всегда равна 1).

Найденная зависимость величины расширения диапазона признака от показателя степени нормирующей ФП используется в дальнейшем для решения задачи о поиске такого согласованного расширения диапазонов нормирования признаков, которое приводит к стабилизации рейтинга объектов, полученных при помощи многокритериальных обобщающих функций.

Заключение

Автор считает, что в данной работе новыми являются следующие положения и результаты: получена аналитическая зависимость между расширением диапазона нормирования значений признака и видом используемой функции полезности. Полученная зависимость используется для обеспечения согласованного изменения соотношения полезностей объектов при расширении оцениваемой выборки.

Список литературы

1. *Бураков Д.П.* Повышение устойчивости рейтинга при изменении совокупности оцениваемых объектов // Труды конф.IEEE AIS'08 и CAD-2008, Дивноморское, 3-10.09. 2008, – М.: Наука. Физматлит, 2008
2. *Микони С. В.* Многокритериальный выбор на конечном множестве альтернатив. СПб.: Лань, 2009.