ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ И ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ИНТЕЛЛЕКТА

ISDMCI'2011

Сборник научных трудов в двух томах

Том 1

Редактор *В. І. Литвиненко*
Відповідальний за випуск *В. О. Резнік*
Комп'ютерна верстка *С. В. Вишемирська*
Типографські роботи *О. Т. Шепетовська*

Підписано до друку 07.05.11 р.
Папір офсетний. Формат 60х84/16. Друк різографія.
Умов.друк.арк 49,51. Замовлення 5365. Наклад 300 прим.

Видавництво Херсонського національного технічного університету
Свідоцтво серія КВ №2906 від 03.10.1997 р.
Адреса редакції: 73008, м. Херсон, Бериславське шосе, 24
тел. (0552)32-69-93

ИТЕРАТИВНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛЕЗНОСТИ*

С.В. Микони, Д.П. Бураков

Петербургский государственный университет путей сообщения,
Россия, 190031 Санкт-Петербург, Московский пр. 9, mikoni@pgups.ru

Введение

Функции полезности (ФП) могут проектироваться на основе известных закономерностей и экспертных предпочтений. Примером известной закономерности является процентное содержание сахара в крови. Оно представляется немонотонной функцией, поскольку существует некоторая норма содержания сахара. Если этой норме поставить в соответствие стопроцентную полезность, то отклонениям от нормы в обе стороны должно соответствовать уменьшение полезности. Таким образом, преобразование известной закономерности в функцию полезности сводится к отображению её значений в абсолютную шкалу [0, 1].

В отсутствие известной закономерности ФП показателя проектируется экспертным путём на основе выявления характера предпочтений лица, принимающего решение (ЛПР). Проектирование ФП осуществляется одним из следующих способов – по точкам, либо подбором параметров известной функции. Достоинством первого подхода является универсальность по отношению к видам ФП, а достоинством второго подхода – более наглядный и простой способ решения задачи, тем более что существуют рекомендации по выбору ряда известных функций. Например, выпуклая (вниз) и вогнутая (вверх) функции отражают соответственно склонность и несклонность ЛПР к риску [1].

Объединение достоинств обоих подходов возможно в рамках их совмещения. В работе рассматривается подход, сочетающий эти два способа. Его сущность заключается в разбиении шкалы показателя на участки и подборе функций для этих участков.

1. Разбиение области определения функции полезности

Область определения функции полезности $u(y_j)$ j-го показателя y_j формируется либо на основе выборки оцениваемых объектов, либо ЛПР. Эта область задаётся границами шкалы этого показателя $[y_{j,\min}, y_{j,\max}]$, которые либо задаются эмпирически, либо определяются по выборке оцениваемых объектов. Простейшая, линейная, ФП строится автоматически, при нормализации значений показателя относительно границ его шкалы. Линейная ФП отражает цель-намерение (идеальную цель) ЛПР: «чем больше (меньше) значение показателя, тем лучше» [2].

Разбиение области определения ФП на две зоны – разрешённых и запрещённых значений осуществляется в том случае, когда ЛПР может сформулировать критический уровень своего притязания. Он выражается реальной целью (целью-планом). На шкале показателя реальная цель представляется точечным значением c_j или интервалом $[c_{j,\min}, c_{j,\max}]$.

Распределение зон разрешённых и запрещённых значений на шкале показателя зависит от вида требований к значениям показателя, определяемого предикатами $\{\geq, \leq, =, [\ ]\}$. У первых двух предикатов–ограничений («снизу» и «сверху») зоны запрещённых значений располагаются на интервалах $[y_{j,\min}, c_j)$ и $(c_j, y_{j,\max}]$ соответственно, а у третьего и четвертого предикатов таких зоны две: $[y_{j,\min}, c_j)$, $(c_j, y_{j,\max}]$ у «равно» и $[y_{j,\min}, c_{j,\min})$, $(c_{j,\max}, y_{j,\max}]$ у «интервал».

Таким образом, при известной реальной цели область определения ФП разбивается как минимум на две зоны, а при интервальном ограничении – на три зоны. Наличие фиксированных значений на шкале показателя облегчает экспертам задание значений функции полезности в этих точках.

Дополнительные точки на шкале показателя находятся, исходя из анализа предпочтений ЛПР относительно скорости изменения полезности.

2. Формирование функции полезности в разрешённых и запрещённых областях значений

Попадание значения показателя $y_j(x_i)$ в область запрещённых значений $[y_{j,\min}, c_j]$ является основанием для отбраковки объекта x_i при формировании допустимого множества.

В тех случаях, когда j-й показатель не является критичным, допускается его участие в формировании многокритериальной функции полезности (обобщающей функции). При этом возможны два варианта интерпретации полезности в области запрещённых значений: нулевая и отрицательная полезность. При скаляризации векторных оценок объекты с нулевой или отрицательной полезностью по отдельным показателям не исключаются с учётом того, что положительная полезность по другим показателям может сделать их обобщённые оценки более предпочтительными.

Задание значения ФП в точке c_j зависит от вида ограничения. При ограничении «равно» она должна принимать своё максимальное значение: $u(c_j) = 1$. При отклонении значения показателя y_j от заданного

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00439)

значения c_j в любую сторону, $|y_j - c_j| > 0$, его полезность должна убывать, что ведёт к появлению немонотонной функции. Если скорость убывания полезности постоянна, то ФП имеет треугольную форму.

Согласно изложенным соображениям ФП, отражающая интервальное ограничение, также является немонотонной и, в отсутствие информации о скорости изменения полезности, имеет трапецеидальную форму. Она принимает максимальное значение $u(y') = 1$, если $y' \in [c_{j,\min}, c_{j,\max}]$.

Неоднозначно определение полезности в точке c_j при ограничениях «снизу» и «сверху». Независимо от решаемой задачи выбора должно соблюдаться условие $u(c_j) \geq 0$. При интерпретации области запрещённых значений показателя нулевой полезностью $u(c_j) > 0$. Это объясняется тем, что при выполнении любого из этих ограничений полезность в точке c_j не может быть равна нулю. А вот какое значение она должна иметь, зависит от решаемой задачи и предпочтений ЛПР. Стопроцентное изменение полезности от нуля (при $y_j < c_j$ для ограничения «снизу») до единицы, $u(y_j) = 1$ (при $y_j = c_j$), возможно для логических ограничений типа: «первый и последний этаж не предлагать».

Если же возможен дальнейший рост полезности при росте y_j от c_j до $y_{j,\max}$, то принимается значение $0 < u(c_j) < 1$. При отсутствии дополнительной информации можно принять $u(c_j) = 0{,}5$. Например, специалист подыскивает работу с окладом y_j не менее c_j д. е. (денежных единиц): $y_j \geq c_j$. Если c_j является минимальным уровнем его притязаний и существует возможность нахождения работы с максимальным окладом $y_{j,\max}$, то можно согласиться с полезностью в 50%. Если отсутствуют предпочтения о скорости роста полезности с увеличением оклада свыше c_j, то в интервале $[c_j, y_{j,\max}]$ принимается линейный рост функции полезности. При этом ФП имеет кусочно-линейную форму.

Отрицательной полезности в области запрещённых значений показателя соответствуют убытки ЛПР. Поэтому в точке перехода от отрицательной к положительной полезности нулевое значение ФП можно считать допустимым: $u(c_j) = 0$. В этом случае в отсутствие информации о скорости изменения полезности в областях разрешённых и запрещённых значений показателя функция полезности представляет собой прямую линию, соединяющую точки $u(y_{j,\min}) = -1$, $u(c_j) = 0$, $u(y_{j,\max}) = 1$. Если же переход из области запрещённых в область разрешённых значений сопряжён со скачкообразным ростом полезности, то можно принять $u(c_j) = 0{,}5$. Функция полезности будет иметь три линейных участка.

3. Формирование функции полезности с учётом скорости изменения полезности

Скорость монотонного изменения полезности на некотором отрезке $[y_a, y_b] \subseteq [y_{j,\min}, y_{j,\max}]$ определяется формой ФП. Для возрастающей функции выпуклая форма отражает медленное увеличение в начале интервала и быстрое увеличение в его конце. Вогнутая функция отражает противоположное поведение. Для определения характера выпуклости монотонной функции на интервале можно воспользоваться неравенством Йенсена [3].

Выполнение следующих условий для средней точки $y_{mid} = (y_a + y_b) / 2$ интервала позволяет определить выпуклость функции $u(y_j)$ на этом интервале:

1. Если выполнено равенство $u(y_b) - u(y_{mid}) = u(y_{mid}) - u(y_a)$, то ФП линейна (возрастание полезности при переходе от y_{mid} к y_b равно возрастанию полезности при переходе от y_a к y_{mid}).
2. Если выполнено неравенство $u(y_b) - u(y_{mid}) > u(y_{mid}) - u(y_a)$, то ФП выпукла (возрастание полезности при переходе от y_{mid} к y_b больше возрастания полезности при переходе от y_a к y_{mid}).
3. Если выполнено неравенство $u(y_b) - u(y_{mid}) < u(y_{mid}) - u(y_a)$, то ФП вогнута (возрастание полезности при переходе от y_{mid} к y_b меньше возрастания полезности при переходе от y_a к y_{mid}).

Отсюда следует, что если требуется идентифицировать тип монотонной функции, описывающей характер изменения полезности градаций показателя с точки зрения ЛПР на интервале $[y_a, y_b]$, то ЛПР должен ответить на следующий вопрос: «Что для Вас предпочтительнее: переход от значения y_a к y_{mid}, или переход от значения y_{mid} к значению y_b?». Если ЛПР не сможет предпочесть один переход другому, то $u(y_j)$ линейная. Если предпочтет первое приращение второму, то она вогнутая, а иначе – выпуклая. Для контроля можно повторить опрос на каждом из интервалов $[y_a, y_{mid}]$ и $[y_{mid}, y_b]$.

Однако само установление факта выпуклости (вогнутости) ФП на интервале $[y_a, y_b]$ с использованием неравенства Йенсена не позволяет оценить степень этой выпуклости. Для оценки степени выпуклости можно воспользоваться тем фактом, что чем больше кривизна функции, тем длиннее на одном их концов интервала относительно плоский участок (для вогнутой – возле y_b, а для выпуклой – возле y_a) [4].

С целью установления степени кривизны необходимо попросить ЛПР указать такое значение показателя, для которого значение полезности отличается от концевого не более чем на малое Δu. Например, можно последовательно предъявлять ЛПР значение y', сдвигаясь от граничной точки до тех пор, пока оно не укажет, что ценность предложенного значения показателя отличается от граничного. Тем самым будет получена такая точка $y' \in [y_a, y_b]$, для которой $u(y') = 1 - \Delta u$. Зная её, легко получить показатель степени, определяющий нужную кривизну ФП.

Действительно, если $u(y') = t$, то, логарифмируя, найдем k:

$$\left(\frac{y' - y_a}{y_a - y_b}\right)^k = t \;\Rightarrow\; k \cdot \ln\left(\frac{y' - y_a}{y_b - y_a}\right) = \ln t \;\Rightarrow\; k = \frac{\ln t}{\ln\left(\dfrac{y' - y_a}{y_b - y_a}\right)}.$$

Рассмотрим пример. Пусть для показателя y на интервале $[y_a, y_b]$ установлен монотонно возрастающий характер предпочтений ЛПР, и ЛПР предпочло переход от значения показателя y_a к y_{mid} переходу от значения y_{mid} к значению y_b. Этот выбор означает, что предпочтения ЛПР описываются вогнутой функцией. Далее, для установления степени вогнутости ЛПР последовательно уменьшаются значения показателя, начиная с y_b. По достижении значения y' ЛПР решает, что значение полезности отличается от 1 на заданное значение Δu. В правой части рис. 1 показан процесс перехода от линейной функции u_1 к вогнутой функции u_2.

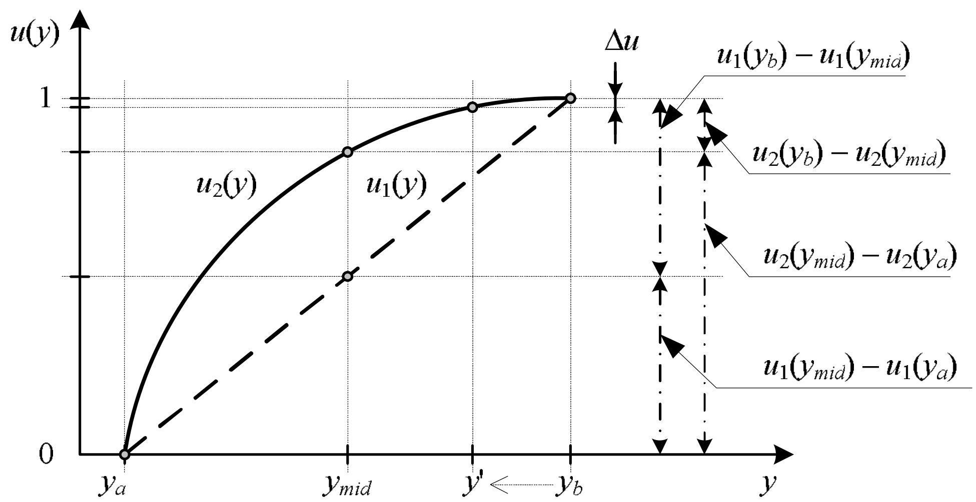

Рис. 1. Идентификация вогнутой ФП на интервале $[y_a, y_b]$

4. Алгоритм построения функции полезности

На основании изложенного предлагается следующий алгоритм построения функции полезности:

1. Если известна только идеальная цель, задаётся направленность предпочтения: $y_j \to \max$ или $y_j \to \min$.
2. В качестве области определения функции полезности задаётся вся шкала показателя $[y_{j,\min}, y_{j,\max}]$. *Идти к* 11.
3. Если известна реальная цель, задаётся значение ограничения на шкале показателя.
4. Если ограничение интервальное $y_j \in [c_{j,\min}, c_{j,\max}]$, то задаётся стопроцентная полезность $u(y_j) = 1$ на диапазоне значений показателя $[c_{j,\min}, c_{j,\max}]$.
5. Задаются две области запрещённых значений показателя: $[y_{j,\min}, c_{j,\min}]$ и $[c_{j,\max}, y_{j,\max}]$. *Идти к* 11.
6. Если ограничение точечное ($y_j = c_j$), то задаётся стопроцентная полезность в точке c_j: $u(c_j) = 1$.
7. Задаются две области запрещённых значений показателя: $[y_{j,\min}, c_j)$, $(c_j, y_{j,\max}]$. *Идти к* 11.
8. Если ограничение снизу ($y_j \ge c_j$) или сверху ($y_j \le c_j$), то определяется вид полезности в области запрещённых значений показателя: *нулевая* или *отрицательная*.
9. Принимается значение полезности в точке c_j: $0 < u(c_j) < 1$, если полезность в области запрещённых значений показателя нулевая, и $0 \le u(c_j) < 1$, если полезность в области запрещённых значений показателя отрицательная.
10. Задаются области разрешённых и запрещённых значений показателя: $(c_j, y_{j,\max}]$, $[y_{j,\min}, c_j)$ – для ограничения снизу, и $[y_{j,\min}, c_j)$, $(c_j, y_{j,\max}]$ – для ограничения сверху. *Идти к* 11.
11. Если отсутствует информация о скорости изменения функции полезности, то строится линейная ФП путём нормализации значения показателя заданным диапазоном его значений.
12. Если скорость изменения функции полезности медленная в начале и быстрая в конце заданного диапазона значений, то принимается выпуклая форма функции.
13. Если скорость изменения функции полезности быстрая в начале и медленная в конце заданного диапазона значений, то принимается вогнутая форма функции.
14. Назначается точки в начале и конце заданного диапазона значений.
15. Подбираются параметры выбранной функции и подставляются в её уравнение.
16. Если погрешность значений функции в выбранных точках не превышает заданной величины, функция принимается, иначе выбирается другая форма функции.
17. Процесс построения функции полезности завершается после нахождения уравнений для каждого из заданных диапазонов значений показателя.

Заключение

Основная трудность построения функций полезности по точкам заключается в недостатках подхода от частного к общему. Лицо, принимающее решение, сразу же должно давать численные оценки полезности, не представляя закона её изменения. При этом не учитывается то обстоятельство, что человеку проще идти от качественных оценок к количественным. Учитывая это, предлагается метод построения функций полезности, основанный на подходе от общего к частному.

Построение функции полезности начинается с выдвижения цели. Моделирование идеальной цели сводится к нахождению скорости изменения функции полезности для разных значений показателя. Выдвижение реальной цели снимает проблему нахождения основных промежуточных точек на графике функции. Задание величины полезности в этих точках облегчается тем, что известны вид ограничения и характер решаемой задачи. Проблема нахождения вида функции решается на основе качественных оценок изменения функции полезности на различных участках графика. Последним этапом является параметризация функции на этих участках. Последовательное уточнение функции полезности даёт основание назвать изложенный метод итеративным.

Литература

1. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. – М.: Радио и связь, 1981. – 559 с.
2. Микони С.В. Многокритериальный выбор на конечном множестве альтернатив. Учебное пособие. – СПб.: Лань, 2009, 272 с.
3. Зорич В. А. Математический анализ. Часть I. Изд. 2-е, испр. и доп. – М.: ФАЗИС, 1997. – 554 с.
4. Микони С.В., Евстифеев В.А. Влияние формы функций полезности на результаты многокритериального выбора. Программные продукты и системы, 2011, № 3.

Опубликовано:

Микони С.В., *Бураков Д.П.* Итеративное проектирование функций полезности // Сборник научных трудов международной научной конференции ISDMCI’2011, –Херсон: ХНТУ, 2011, том 1, стр. 188-192.