

Влияние формы функций полезности на результаты многокритериального выбора*

С.В. Микони, д.т.н., В.А. Евстифеев

(Петербургский государственный университет путей сообщения)

Ключевые слова: функция полезности (ФП), вогнутая, выпуклая, линейная ФП, обобщающая функция (ОФ), аддитивная ОФ, мультипликативная ОФ, скалярная оптимизация.

Введение

Многокритериальные оценки сущностей, характеризуемых совокупностью однородных показателей, вычисляются непосредственно на основе их значений. Такие задачи решаются в теории игр, где ход каждого игрока оценивается вектором выигрышей (потерь) от возможных ходов второго игрока. Однородность показателей определяется единством их шкал и единиц измерения. Условием получения многокритериальных оценок объектов, характеризуемых совокупностью неоднородных показателей, является их приведение к единой шкале и единицам измерения [1]. Эта задача решается методом нормализации значений показателей. При этом все оценки получаются безразмерными, а шкала – абсолютной, – с фиксированным нулём и единицей. Это позволяет выполнять над оценками любые арифметические операции. С точки зрения многокритериальной теории полезности, нормализация значений показателей означает создание линейных функций полезности. Для автоматического порождения функции полезности достаточно лишь указать направление оптимизации показателя. Иными словами, линейная функция полезности возникает тогда, когда ничего неизвестно о цене делений показателя, и, следовательно, все деления его шкалы равноценны. По этой причине при многокритериальной оптимизации обычно не используется термин «полезность».

Полезность показателя специально рассматривается в тех случаях, когда деления его шкалы неравноценны. Этой информацией обладают эксперты в соответствующей предметной области. На основе их опыта или известных статистических данных определяется форма функции полезности (ФП). Если отсутствует аналитическая форма, ФП строится по точкам. В [2] описываются исчерпывающие процедуры построения ФП на основе диалога с экспертами. Многокритериальная теория полезности получила применение при решении экономических задач, характеризуемых небольшим числом альтернатив и критериев. Между тем, применение функций полезности актуально для решения и других задач. Примером такой задачи является упорядочение объектов, принадлежащих множеству Парето.

Постановка задачи

Целью настоящей работы является экспериментальное исследование степени влияния кривизны ФП на результаты многокритериального выбора. Для проведения исследования будем использовать множество из пяти объектов: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, оцениваемых в двухкритериальном пространстве векторами значений признаков $\mathbf{y}(x_i) = (y_{i1}, y_{i2})$, $i = 1, \dots, 5$.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00439)

Пусть имеются следующие векторные оценки объектов: (5, 5), (6, 4), (7, 3), (8, 2), (9, 1). Они подобраны таким образом, чтобы сумма компонентов была равна 10. При одинаковой направленности критериев (например, к максимуму), все объекты, обладающие этими оценками, являются недоминируемыми, т.е. принадлежат множеству Парето, поскольку улучшение одного показателя на единицу сопровождается ухудшением на ту же величину другого показателя. Иными словами, все объекты принадлежат выпуклой линейной оболочке дискретного множества. Очевидно, что при равной важности скалярные оценки объектов, вычисленные с применением аддитивной обобщающей функции, принадлежат линии безразличия этой функции. Таким образом, переход от векторной к скалярной оптимизации не улучшает различимости элементов множества X .

Если отсутствует информация о важности критериев и аддитивная обобщающая функция не подлежит замене на другую, единственным способом упорядочения объектов остаётся учёт ценности значений показателей. Если их функции полезности оставить монотонными, то различия многокритериальных оценок можно добиться заданием различной кривизны ФП. Пусть ФП второго показателя остаётся линейной, а функцию полезности первого показателя будем задавать вогнутой (выпуклой).

Вогнутая функция полезности отражает понижение ценности деления показателя, а выпуклая ФП – повышение его ценности. При построении ФП на основе лотерей первые из них характеризуют не склонность, а вторые – склонность к риску.

Модель нелинейной функции полезности

Линейная функция полезности j -го показателя, подлежащего максимизации, вычисляется нормированием значения y_j диапазоном его шкалы:

$$u_1(y_j) = \frac{y_j - y_{j,\min}}{y_{j,\max} - y_{j,\min}} \quad (1)$$

Функция (1) преобразуется в нелинейную путём возведения её формулы в степень k :

$$u_k(y_j) = \left(\frac{y_j - y_{j,\min}}{y_{j,\max} - y_{j,\min}} \right)^k \quad (2)$$

Значениям $k < 1$ соответствуют вогнутые функции. На рис.1 приведено семейство, состоящее из трёх вогнутых и одной линейной функции в диапазоне значений целочисленного аргумента y от 1 до 10.

Рисунок наглядно показывает влияние степени k на крутизну функции. Наибольшей крутизной в точке 1 обладает ФП со степенью $k=0,05$. Величина ФП убывает по мере приближения к линейной функции ($k=1$) ступенями 0,2; 0,5. В точке 10 величина всех функций полезности (независимо от степени k) равна 1: $u(y)=1$.

Симметричное семейство выпуклых функций полезности, занимающих нижнюю часть графика, образуют степени $k > 1$: 2; 4; 10 (см. рис.2). Они также равны 1 ($u(y)=1$) на верхней границе шкалы показателя.

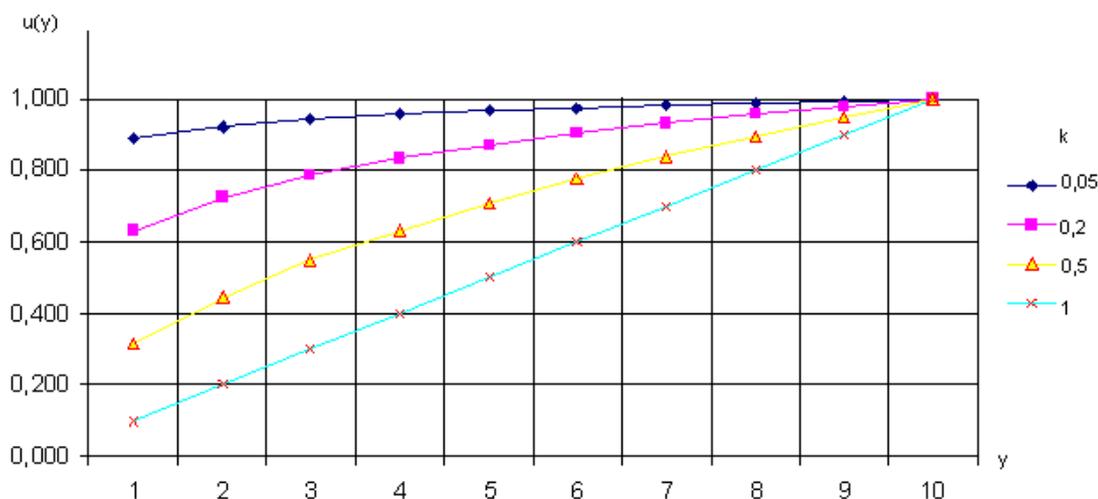


Рис. 1. Семейство вогнутых функций полезности со степенями от 0,05 до 0,5.

Согласно рисункам 1 и 2 наибольшее различие вогнутых ФП с линейной функцией наблюдается в первой половине шкалы показателя, а выпуклых ФП – во второй половине шкалы. Величина разности значений линейной и нелинейных ФП пропорциональна отклонению степени ФП от 1. Эти различия и определяют влияние формы ФП на многокритериальный выбор.

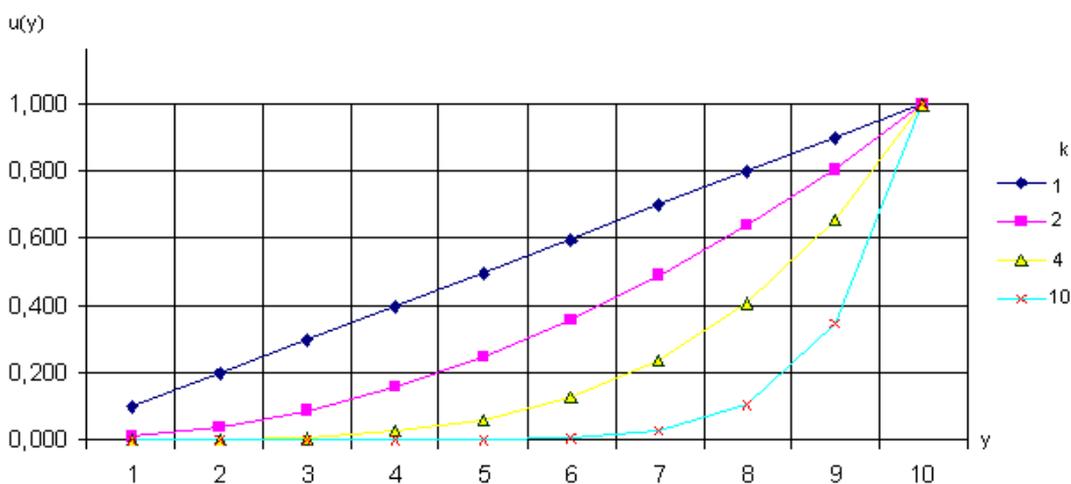


Рис. 2. Семейство выпуклых функций полезности со степенями от 2 до 10.

Влияние нелинейной функции полезности на двухкритериальные оценки

Рассмотрим влияние нелинейной ФП первого показателя на значения обобщающих функций – аддитивной и мультипликативной – в предположении равной важности двух показателей. За базу сравнения примем обобщённые оценки двух линейных функций. В качестве оцениваемого варианта примем обобщение линейной ФП второго показателя и нелинейную ФП первого показателя с максимальным отклонением её степени от 1. Значения аддитивной функции,

обобщающей вогнутую и линейную ФП (столбец $k=0,05$) и две линейных ФП (столбец $k=1$), приведены в табл.1.

Значения аддитивной ОФ для двух вариантов ФП. Таблица 1

Объект	(y_1, y_2)	$k=0,05$	$k=1$
1	(5, 5)	0,73	0,5
2	(6, 4)	0,69	0,5
3	(7, 3)	0,64	0,5
4	(8, 2)	0,59	0,5
5	(9, 1)	0,55	0,5

Графики аддитивной обобщающей функции для вариантов с линейной и нелинейной ($k=0,05$) функцией полезности первого показателя приведены на рис. 3.

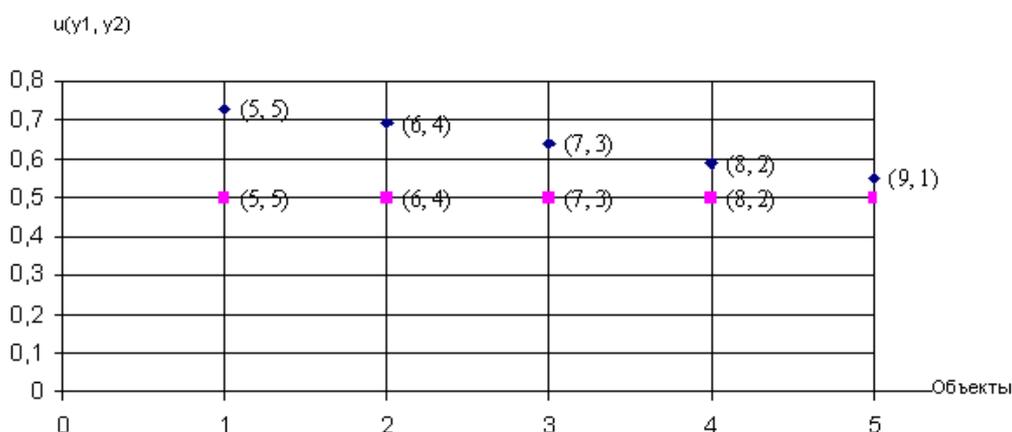


Рис. 3. Графики аддитивной ОФ для двух вариантов функций полезности

Двухкритериальные оценки объектов для варианта, принятого за базу сравнения, принадлежат одному уровню безразличия $u(y_1, y_2)=0,5$. Двухкритериальные оценки для варианта с вогнутой функцией полезности первого показателя позволяют различить объекты, причём максимальное различие двухкритериальных оценок (почти 50%) имеет место для того значения первого показателя ($y_1=5$), которому соответствует наибольшая разность между значениями линейной и нелинейной функцией полезности.

Значения мультипликативной функции, обобщающей вогнутую и линейную ФП (столбец $k=0,05$) и две линейных ФП (столбец $k=1$), приведены в табл.2.

Значения мультипликативной ОФ для двух вариантов ФП. Таблица 2

Объект	(y_1, y_2)	$k=0,05$	$k=1$
1	(5, 5)	0,69	0,50
2	(6, 4)	0,62	0,49
3	(7, 3)	0,54	0,46
4	(8, 2)	0,44	0,40
5	(9, 1)	0,32	0,30

Графики мультипликативной обобщающей функции для вариантов с линейной и нелинейной ($k=0,05$) функцией полезности первого показателя приведены на рис. 4.

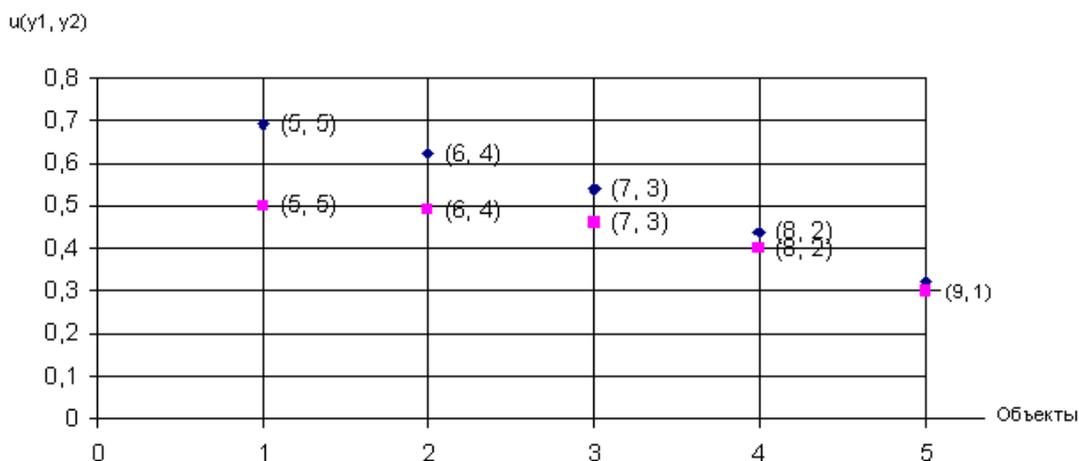


Рис. 4. Графики мультипликативных ОФ для двух вариантов обобщаемых ФП

Подобно аддитивной ОФ мультипликативная обобщающая функция также различает объекты с различной формой функции полезности, хотя и с меньшей разницей величин двухкритериальных оценок. Логично предположить, что при увеличении числа агрегируемых показателей различие между многокритериальными оценками линейных и нелинейных ФП будет убывать независимо от вида обобщающей функции.

Учитывая сходство вогнутых и выпуклых функций полезности в смысле их отличия от линейной ФП, аналогичное различие двухкритериальных оценок имеет место и при применении выпуклых функций полезности.

Заключение

В обычной практике применения методов скалярной оптимизации при наличии неоднородных показателей осуществляется приведение их значений к единой шкале с применением операции нормирования. С позиции многокритериальной теории полезности это означает применение линейных функций полезности. Между тем, во многих практических случаях экспертиза не подтверждает равноценности делений шкалы показателя. Следовательно, применение линейных функций полезности можно считать оправданным, если отсутствует возможность получения экспертных оценок по ценности делений шкал показателей. В силу того, что процедура экспертизы шкалы трудоёмка [2], а результаты её требуют тщательной проверки, на практике ею часто пренебрегают. Но при этом следует иметь в виду, что расхождения в результатах скалярной оптимизации могут быть значительными, что проиллюстрировано приведёнными в работе примерами.

Погрешность многокритериальных оценок тем больше, чем больше степень нелинейной ФП отличается от линейной ($k=1$) и чем меньше число агрегируемых показателей. Применение нелинейных функций полезности, помимо уменьшения погрешности многокритериальных оценок,

является одним из способов различения объектов, не различаемых векторными методами оптимизации.

Литература

1. *Микони С.В.* Многокритериальный выбор на конечном множестве альтернатив. Учебное пособие. –СПб.: Лань, 2009, –273 с.
2. *Кини Р.Л., Райфа Х.* Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. – М.: Радио и связь, 1981. – 559 с.
3. *Бураков Д.П.* Проверка результатов многокритериального упорядочения на Парето-оптимальность // Известия ПГУПС – СПб.: ПГУПС, 2006, – Вып. 2(7), с. 28–34.

Опубликовано:

Микони С.В., Евстифеев В.А. Влияние формы функций полезности на результаты многокритериального выбора // Программные продукты и системы, 2011, №3, с. 54-56.