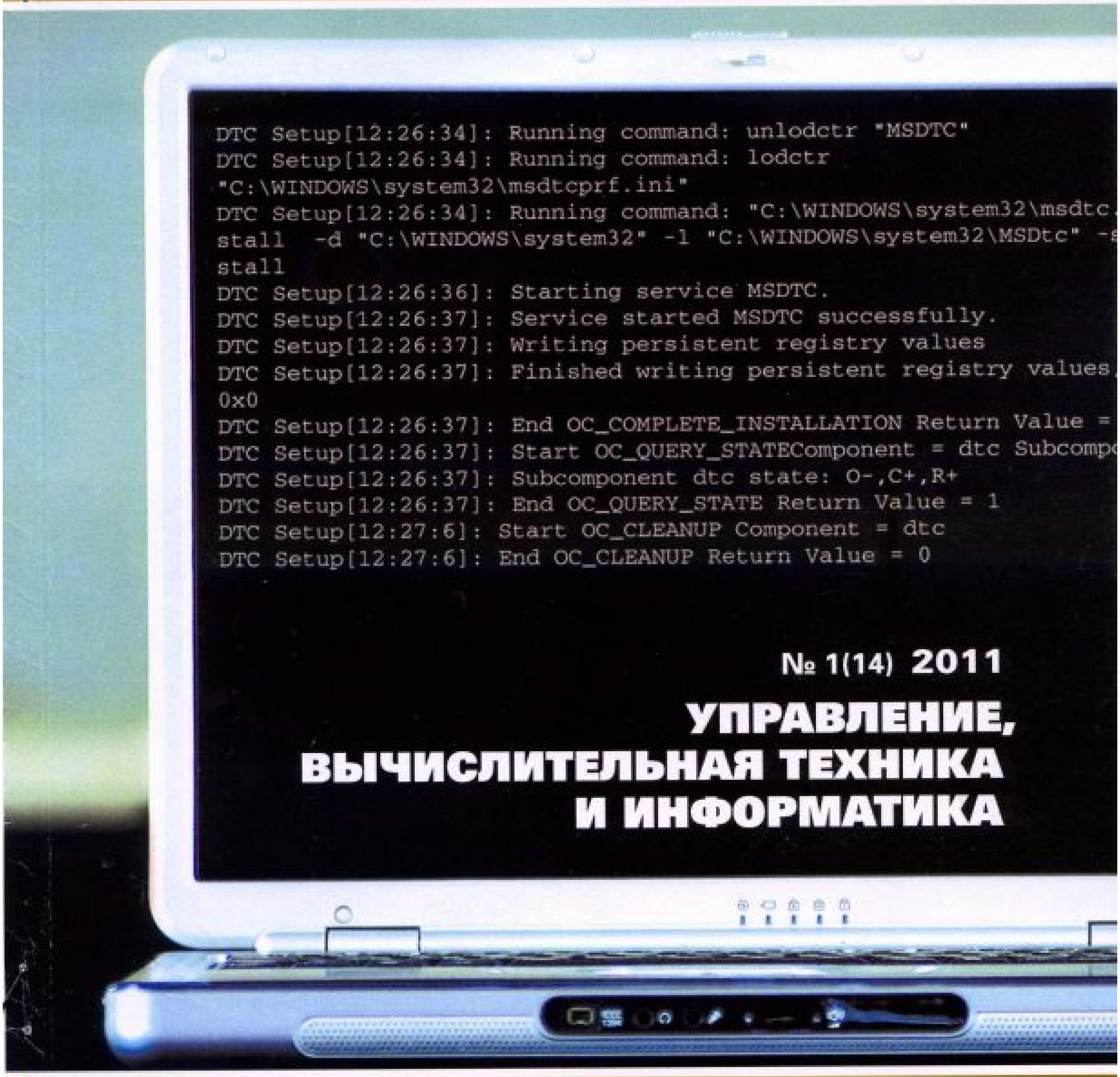
ISSN 1998-8605

ВЕСТНИК
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА



№ 1(14) 2011

УПРАВЛЕНИЕ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И ИНФОРМАТИКА

Tomsk State University

Journal of Control and Computer Science

Мягкая условная оптимизация на дискретном множестве объектов[*]

С.В. Микони

(Петербургский государственный университет путей сообщения)

Ключевые слова: *условная оптимизация, критерий целевой, ограничительный, функция полезности (ФП), обобщающая функция, скалярная оценка, аддитивная многокритериальная ФП.*

Введение

К задачам оптимизации относят формирование допустимого множества X_{sel} и поиск наилучшего решения x^* в этом множестве: $x^*\in X_{sel}$. Метод оптимизации по одному критерию, когда для формирования допустимого множества используются остальные n–1 критериев, названные в [1] ограничительными, называется методом главного критерия [2]. В более общем случае для поиска наилучшего решения x^* может использоваться m>1 критериев, а остальные n–m критериев играют роль ограничительных. Методы многокритериальной оптимизации, использующие предварительное отсеивание вариантов по заданным ограничениям, получили название методов условной оптимизации [3].

Случаи, когда все n критериев используются либо для формирования допустимого множества X_{sel}, либо для поиска наилучшего решения x^* в исходном множестве X, относятся к частным задачам оптимизации. Вероятность получения пустого допустимого множества X_{sel} при многих ограничительных критериях высока. Поскольку метод уступок, заключающийся в последовательном ослаблении ограничений для получения непустого допустимого множества трудоёмок, в [4] был предложен метод мягких притязаний. Его идея заключается в упорядочении объектов относительно обобщённого расстояния от образца, за который принимается совокупность заданных ограничений. При этом ни один из объектов не отбрасывается. Аналогичный ему «мягкий» подход может быть применён при решении задачи условной оптимизации. Дело в том, что объекты, бракуемые по некоторому ограничительному критерию, могут оказаться более предпочтительными оставшихся по совокупности целевых критериев. Например, в бытовой задаче выбора квартиры часто ставится требование: «первый и последний этаж не предлагать». Однако уютный зелёный двор и достаточные средства безопасности могут сделать квартиру на первом этаже более предпочтительной, чем на промежуточных этажах, где соседи есть как сверху, так и снизу. В работе рассматривается метод решения такой задачи, названный аналогично методу мягких притязаний методом мягкой условной оптимизации.

Функция полезности ограничительного критерия

Метод мягкой условной оптимизации основан на применении функций полезности не только для целевых, но и ограничительных критериев. Его идея заключается в том, что функция полезности j-го ограничительного критерия принимает нулевое значение в области запрещённых значений критерия. Таким образом, объекты, не отвечающие ограничению по j-го критерию, не исключаются из исходного множества X, а получают нулевую оценку по этому критерию.

[*] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00439)

В качестве примера будем рассматривать ограничение «снизу» $y_j \geq c_j$, представляемое двухместным предикатом $P_{\geq}(y_j,\ c_j)$. Область значений j-го показателя $[y_{j,\min},\ c_j)$ является запрещённой, а область $[c_j,\ y_{j,\max}]$ – разрешённой. В простейшем случае за функцию полезности $u(y_j)$ j-го показателя принимается предикат $P_{\geq}(y_j,\ c_j)$:

$$u(y_j)=P_{\geq}(y_j,\ c_j) = \begin{cases} 1, \text{ если } y_j \in [c_j,\ y_{j,\max}]; \\ 0, \text{ если } y_j \in [y_{j,\min},\ c_j). \end{cases}$$

Подчеркнём, что, начиная с граничного значения на всём диапазоне значений $[c_j,\ y_{1,\max}]$ функция полезности $u(c_j)=1$. Графически такая функция представляется прямоугольным импульсом с передним фронтом в точке c_j. Для фиксированных дискретных значений j-го показателя, входящих в диапазон $[c_j,\ y_{j,\max}]$, значения функции полезности принадлежат вершине импульса. Однако стопроцентная полезность показателя на всём отрезке допустимых значений не всегда уместна. Действительно, пороговое значение обычно означает минимальное требование к показателю. Чем дальше значение показателя удаляется от порогового значения, тем функция полезности должна быть больше.

Наиболее дискуссионным выглядит вопрос о значении функции полезности в точке c_j. С одной стороны требование к j-у показателю удовлетворено, и функция полезности должна быть больше нуля: $u(c_j)>0$. С другой стороны, стопроцентная полезность в этой точке лишает возможности увеличивать полезность, удаляясь от порогового значения. При принятии решения о значении функции полезности $u(c_j)$ в точке c_j следует принимать также во внимание соотношение интервалов $[y_{j,\min},\ c_j)$ и $[c_j,\ y_{j,\max}]$. Компромиссным вариантом является значение $u(c_j)=0{,}5$. Оно показывает, что требование выполнено, но остаётся возможность увеличения функции полезности при его перевыполнении. В любом случае значение $u(c_j)$ устанавливается экспертным путём так же, как и значения функции полезности на отрезке $(c_j,\ y_{j,\max}]$.

Конкурентоспособность объектов, не отвечающих ограничению

Конкурентоспособность объекта $x_i \in X$, не отвечающего заданным ограничениям, проявляется через соотношение его скалярной оценки со скалярными оценками других объектов из множества X. Скалярная оценка объекта вычисляется относительно целевых критериев с применением обобщающей функции. В качестве таковой примем аддитивную многокритериальную функцию полезности:

$$y_a(x_i) = \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot u_j(x_i) \tag{1}$$

Если значение y_j j-го показателя i-го объекта x_i принадлежит области запрещённых значений ограничительного критерия f_j, то $u_j(x_i)=0$. Очевидно, что чем меньшее число ограничений нарушается объектом x_i, тем его скалярная оценка (1) выше. Поэтому наиболее вероятна конкурентоспособность объектов, нарушающих только одно из ограничений.

Пусть объект x_i не соответствует l-у ограничительному критерию. Тогда $u_l(x_i)=0$. Отсюда следует условие конкурентоспособности объекта x_i по остальным критериям:

$$\sum_{j=1}^{n-1} w_j \cdot u_j(x_i) > \sum_{j=1}^{n-1} w_j \cdot u_j(x_k) + w_l \cdot u_l(x_k), \quad k \neq i, \quad l \neq j. \qquad (2)$$

Согласно условию (2) скалярные оценки объектов, удовлетворяющих l-у ограничительному критерию, больше скалярной оценки объекта x_i на величину $w_l{\cdot}u_l(x_k)$. Следовательно, чем меньший вклад в скалярную оценку вносит эта величина, тем больше шансов у объекта x_i опередить остальные объекты.

Величина произведения $w_l{\cdot}u_l(x_k)$ зависит от величин его сомножителей. Она уменьшается с уменьшением важности ограничительного критерия и величиной функции полезности. Для объектов, выполнивших l-е ограничение, следует принимать во внимание только значения $u_l(x_k)$, определённые на отрезке $[c_j, y_{j,\max}]$. На этом отрезке функция полезности $u_l(x_k)>0$, а её величина в разрешённых точках определяется формой функции. Если форма прямоугольная, то величина произведения сводится к важности критерия: $w_l{\cdot}u_l(x_k)=w_l{\cdot}1=w_l$. Наименьшее приращение $u_l(x_k)$ имеет место для выпуклой функции полезности с наибольшей положительной степенью.

Итак, общими факторами, которые влияют на скалярные оценки объектов, удовлетворяющих l-у ограничительному критерию, является важность критерия и форма функции полезности. Влияние объекта на величину скалярной оценки проявляется через значение l-го показателя. Чем оно меньше, тем больше шансов на то, что скалярная оценка x_i может оказаться выше остальных. И тем самым объект x_i, который мог быть исключён из множества X при применении метода условной оптимизации, при использовании мягкой условной оптимизации оказывается предпочтительнее объектов, удовлетворяющих ограничительному критерию.

Пример применения мягкой условной оптимизации

Пусть перед очередниками на получение жилплощади возникла задача выбора квартиры в пятиэтажном доме. При сравнительно одинаковых характеристиках квартир очередника будет интересовать их расположение в доме. С этой целью он рассматривает 4 признака: этаж, вид из окон, число соседей (по этажам), подъём на этаж. В нашем примере очереднику предложено выбрать одну из пяти квартир, расположенных на разных этажах. Их характеристика по выбранным признакам приведена в табл.1.

Характеристика квартир Таблица 1.

Квартира	Этаж	Окна	Соседи	Подъём
Кв.1	1	5	1	1
Кв.2	2	1	2	2
Кв.3	3	2	2	3
Кв.4	4	3	2	4
Кв.5	5	4	1	5

Вид из окон закодирован следующими числами: 1 – 3 окна на улицу, 2 – 2 окна на улицу, 3 – 1 окно на улицу, 4 – вид на неблагоустроенный двор, 5 – вид на зелёный двор. Промежуточные квартиры имеют двух соседей по этажам, а крайние (1-й и 5-й этаж) – одних соседей. Трудоёмкость подъёма в квартиру в доме без лифта обратно пропорциональна её этажности.

Условия выбора представлены в табл.2.

Условия выбора квартиры Таблица 2.

Признак	Мин.зн.	Макс.зн.	Вес	Опт.	Нижн.гр.	Верхн.гр.
Этаж	1	5	0,25	Макс	1	5
Окна	1	5	0,25	Макс	0	5
Соседи	1	2	0,25	Макс	0	2
Подъём	1	5	0,25	Мин	1	5

Во втором и третьем столбцах представлены границы шкал признаков. В четвёртом столбце задан вес признаков (важность критериев), а в пятом столбце – направление оптимизации. Различие шкал и единиц измерения позволяют считать рассматриваемые признаки неоднородными. При применении скалярной оптимизации они подлежат нормированию. Результатом нормирования целевых критериев являются линейные монотонные функции. Однако их применение без критического анализа полезности может дать неправильные результаты.

Рассмотрим функции полезности признаков, начиная с ограничительного критерия «Этаж». Его функция полезности представлена на рис.1.

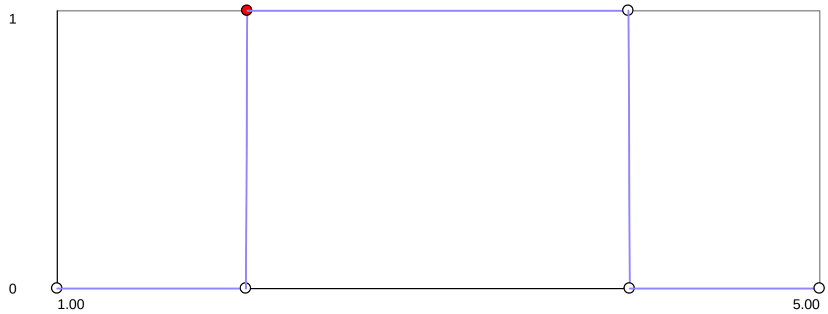


Рис.1. Функция полезности признака «Этаж»

Она создана на основе пожелания «первый и последний этаж не предлагать», и имеет нулевые значения для 1-го и 5-го этажей. Несмотря на дискретный характер функции для большей наглядности и общности она изображена непрерывными отрезками.

Функция полезности признака «Окна» представлена на рис.2. Она монотонно возрастает пропорционально кодам, характеризующим вид из окна. Для того, чтобы полезность кода 1 не была нулевой, левая граница шкалы сдвинута до нуля (см. шестой столбец табл. 2).

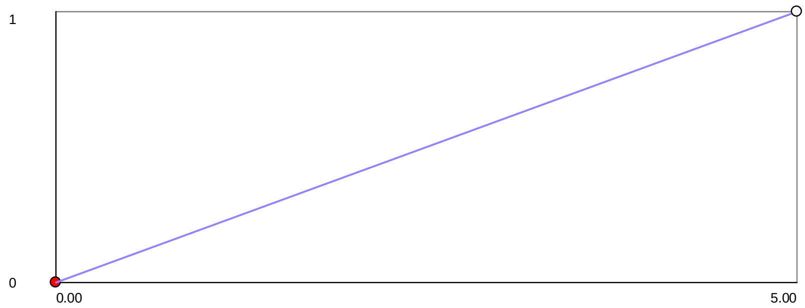


Рис.2. Функция полезности признака «Окна»

Функция полезности признака «Соседи» представлена на рис.3. Расширение левой границы шкалы этого признака до нуля не принципиально. Одному соседу по этажу назначена стопроцентная полезность, а двум соседям – 50 %.

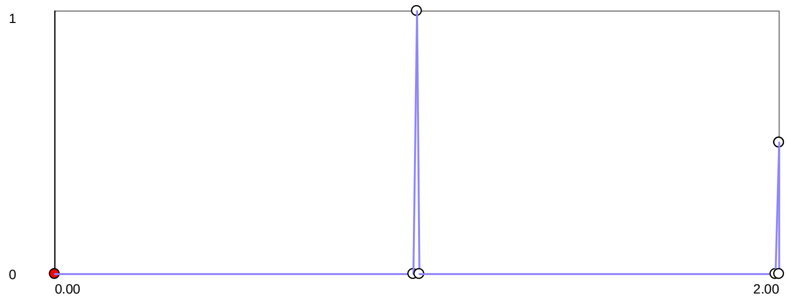


Рис.3. Функция полезности признака «Соседи»

Функция полезности признака «Подъём» представлена на рис.4. Полезность характеризует трудоёмкость подъёма и обратно пропорциональна этажности квартиры. Пятому этажу назначена полезность в 30%.

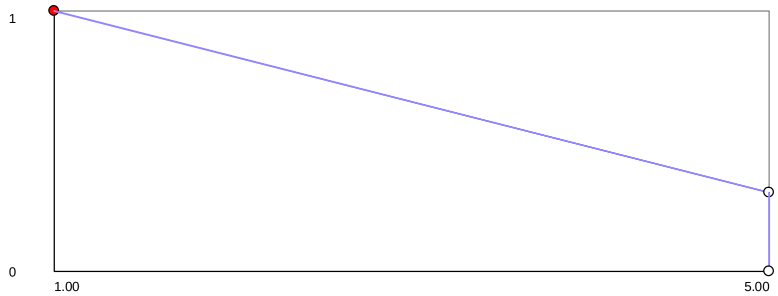


Рис.4. Функция полезности признака «Подъём»

Если воспользоваться методом условной оптимизации с ограничением по этажности квартиры («первый и последний этаж не предлагать»), то после исключения вариантов кв.1 и кв.5 для выбора остались бы 3 варианта: кв.2, кв.3, кв.4. Применение метода мягкой условной оптимизации с приведёнными функциями полезности даёт следующие результаты (см. табл.3).

Оптимизация при равноважных критериях Таблица 3.

Квартира	Этаж	Окна	Соседи	Подъём	Общая оценка	Ранг
Кв.1	0	1,0	1,0	1,000	**0,75**	**1**
Кв.2	1	0,2	0,5	0,825	**0,63**	4
Кв.3	1	0,4	0,5	0,650	**0,64**	3
Кв.4	1	0,6	0,5	0,475	**0,64**	2
Кв.5	0	0,8	1,0	0,300	**0,53**	5

Квартира на первом этаже, имеющая нулевую полезность по первому признаку, получила наивысшую скалярную оценку за счёт трёх целевых критериев. Если очередник – пожилой человек или инвалид, для него наиболее важным критерием является «Подъём». Если ему назначить вес 0,5, а остальным критериям – по 0,167, то второй и четвёртый варианты квартир по предпочтению поменяются местами (см. табл.4).

Оптимизация при не равноважных критериях Таблица 4.

Квартира	Этаж	Окна	Соседи	Подъём	Общая оценка	Ранг
Кв.1	0	1,0	1,0	1,000	**0,83**	1
Кв.2	1	0,2	0,5	0,825	**0,70**	***2***
Кв.3	1	0,4	0,5	0,650	**0,64**	3
Кв.4	1	0,6	0,5	0,475	**0,59**	***4***
Кв.5	0	0,8	1,0	0,300	**0,45**	5

Заключение

Метод мягкой условной оптимизации соответствует подходам, применяемым в настоящее время для решения трудно формализуемых («человеческих») проблем. Переход от жёстких оценок «Истина» и «Ложь» породил многозначную, а в пределе – нечёткую логику. Частичная истина позволила создать теорию нечётких множеств, хорошо моделирующую человеческие оценки явлений и сущностей. В русле этих подходов находится основная идея метода мягкой условной оптимизации – заменить отсеивание объектов, не удовлетворяющих ограничениям (жёсткий подход) на оценивание этих объектов по остальным критериям (мягкий подход). При этом нередко кандидат на отсеивание может оказаться лучшим среди других объектов, не подлежавших отсеиванию.

Другим, не менее важным, результатом работы является применение обоснованных функций полезности. Весьма часто при нормализации неоднородных показателей забывают, что для получения скалярных оценок используются линейные функции полезности. Однако правомерность их использования требует доказательств. В противном случае результаты оптимизации получаются неточными. Создание функций полезности представляет собой достаточно трудоёмкий процесс. Однако он окупается получением доказательной базы для обоснования достоверности получаемых результатов. В тех случаях, когда результат оптимизации кажется интуитивно правильным («зачем было огород городить?»), вся работа по созданию модели выбора может рассматриваться в качестве обоснования правильности полученных результатов.

Литература

1. *Микони С.В.* Многокритериальный выбор на конечном множестве альтернатив. Учебное пособие. –СПб.: Лань, 2009, –273 с.
2. *Черноруцкий И.Г.* Методы принятия решений. Учебное пособие. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 408 с.
3. *Перегудов Ф.И., Тарасенко Ф.П.* Введение в системный анализ. –М.: Высшая школа, 1989, 367 с.
4. *S. Mikoni* Method of choice by approximation to a pattern // Proceedings of Conf. NITE’2000, – Minsk: Belarus State Edonomic University, 2000, pp. 156–159.

Опубликовано:

Микони С.В. Мягкая условная оптимизация на дискретном множестве объектов // Вестник Томского Политехнического университета, 2011, N3, с.39-44.